

## Elastischer Stoß.

Von F. AUERBACH.

---

**Allgemeines.** Wenn zwei Körper bei ihrer Bewegung miteinander in Berührung kommen, so tritt eine Reihe von Erscheinungen auf, welche man als die Erscheinungen des Stoßes zusammenfaßt. Bestimmend für sie sind die Massen der beiden Körper, ihre Geschwindigkeiten vor dem Stoße nach Größe und Richtung, ihre Elastizitäts- und zuweilen auch ihre Reibungsverhältnisse, endlich die Lage und Beschaffenheit der Berührungsstellen. Zu ermitteln sind einmal die Geschwindigkeiten nach dem Stoße, wiederum nach Größe und Richtung, und zweitens die Vorgänge und Begleiterscheinungen während der Berührung selbst (Stoßzeit, Stoßfläche, Stoßtiefe, Erwärmung, Schall, dauernde Deformation u. s. w.). Bei Beschränkung auf den ersten Punkt kann man schon durch elementare Betrachtungen zu Ergebnissen gelangen; diese sind aber nur in gewissen Spezialfällen erfahrungsgemäß streng richtig, in anderen sind sie es nur näherungsweise, in noch anderen endlich werden sie durch die Beobachtungen widerlegt. Alsdann, und ebenso wenn es sich um Probleme der zweiten Klasse handelt, muß die höhere Elastizitätstheorie zugrunde gelegt werden, die jedoch ebenfalls, ihrem heutigen Stande nach, die Beobachtung nur in einigen Fällen befriedigend wiedergibt.

Man unterscheidet zunächst den zentralen Stoß, bei dem im Moment der Berührung die Stoßrichtung, d. h. die Verbindungslinie der Schwerpunkte der beiden Körper, auf der Tangentialebene senkrecht steht, von dem exzentrischen Stoße, bei dem entweder nur eine oder keine der beiden von den Schwerpunkten nach der Berührungsstelle gezogenen Linien auf der Tangentialebene senkrecht steht. Bei zwei homogenen Kugeln z. B. ist jeder Stoß zentral, bei Ellipsoiden nur, wenn die Berührung an den Enden der Achsen stattfindet u. s. w. Zweitens unterscheidet man den geraden Stoß, bei dem die vor dem Stoße stattfindenden Bewegungsrichtungen gemeinschaftlich in die Stoßrichtung fallen, von dem schiefen Stoße, wo eine oder beide Bewegungsrichtungen mit der Stoßrichtung einen Winkel bilden. Beim schiefen exzentrischen Stoße können dabei noch verschiedene Möglichkeiten eintreten, auf die jedoch hier nicht näher eingegangen werden kann. Drittens hat man den Stoß auf einen freien, auf einen drehbaren oder auf einen festen Körper bzw. zwischen solchen zu unterscheiden. Endlich werden die Erscheinungen kompliziert, wenn die stoßenden Körper vor dem Stoße außer der fortschreitenden auch noch eine drehende (rollende oder kreiselnde) Bewegung haben.

1. Elementare Theorie.<sup>1</sup>

**Gerader zentraler Stoß.** Hier verläuft die ganze Erscheinung in einer Linie, und es handelt sich nur darum, bei gegebenen Massen  $m_1$  und  $m_2$  der Körper  $K_1$  und  $K_2$  (die man sich der Anschaulichkeit halber als Kugeln vorstellen kann) und gegebenen Geschwindigkeiten  $c_1$  und  $c_2$  vor dem Stoße die Geschwindigkeiten  $v_1$  und  $v_2$  nach demselben zu ermitteln. Hierzu können nach Wahl verschiedene Prinzipien der Mechanik dienen. Wählt man das der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung (Prinzip 9, p. 224), so argumentiert man folgendermaßen: Während der Berührung übt jeder der beiden Körper auf den anderen einen Druck aus, und nach dem obigen Prinzip sind diese beiden Drucke gleich und entgegengesetzt. Folglich werden auch die Wirkungen, die sie hervorbringen, gleich und entgegengesetzt sein; jede dieser Wirkungen besteht nun in einer Geschwindigkeitsänderung ( $v_1 - c_1$  bzw.  $v_2 - c_2$ ), also in einer Änderung der Bewegungsgröße (p. 43). Man erhält also

$$m_1(v_1 - c_1) = m_2(c_2 - v_2)$$

oder auch

$$(1) \quad m_1 c_1 + m_2 c_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2 = \text{const} .$$

Wählt man das Prinzip von der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes (Prinzip 13, p. 226), so hat man für Ort und Geschwindigkeit des Schwerpunktes von  $K_1$  und  $K_2$  vor dem Stoße, also auch nach ihm:

$$x = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} , \quad \text{also} \quad v = c = \frac{m_1 c_1 + m_2 c_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} ,$$

also wieder wie oben. In Worten besagt diese Gleichung: Die Summe der Bewegungsgrößen beider Körper wird durch den Stoß nicht geändert. Hiermit hat man aber nur eine einzige Bestimmungsgleichung für die beiden gesuchten Größen  $v_1$  und  $v_2$ , und es können folglich unendlich viele verschiedene Fälle eintreten. Welcher von ihnen eintritt, hängt von der Elastizität des Materials von  $K_1$  und  $K_2$  ab. Die beiden hier möglichen äußersten Fälle sind diejenigen völlig unelastischer und vollkommen elastischer Körper.

a) Unelastischer Stoß. Der Druck der Körper aufeinander deformiert diese, ohne eine innere Gegenkraft wachzurufen; es wird also ein völliger Ausgleich sowohl des Druckes als der Geschwindigkeiten stattfinden, die relative Geschwindigkeit der Körper gegeneinander, die vor dem Stoße  $c_1 - c_2$  betrug, ist nach ihm null geworden, und die Körper werden sich gemeinsam (ohne sich wieder zu trennen), mit gleicher Geschwindigkeit fortbewegen, nämlich mit der Geschwindigkeit

$$(2) \quad v_1 = v_2 = v = c = \frac{m_1 c_1 + m_2 c_2}{m_1 + m_2} .$$

Stoßen also z. B. zwei Kugeln von gleicher Masse mit gleichen, entgegengesetzten Geschwindigkeiten aufeinander ( $m_1 = m_2$ ,  $c_1 = -c_2$ ), oder stoßen zwei

<sup>1</sup> Die mechanische Theorie des Stoßes ist, nachdem die schon 30 Jahre vorher von dem Prager Arzte MARC MARCI aufgestellten Gesetze fast unbekannt geblieben waren, fast gleichzeitig 1668 infolge einer Preisfrage der Londoner Akademie von HUYGENS (De motu corporum ex percussione), WALLIS (Opera I. 1012: De percussione) und WREN entwickelt und in den Trans. Roy. Soc. I. zuerst veröffentlicht. — Bald darauf hat auch NEWTON die Stoßtheorie entwickelt (Philos. nat. princ. math., Einleitung); weiterhin lieferten EULER, KARSTEN, MUSCHENBROEK, MAUPERTUIS, LAMBERT u. A. Beiträge, vgl. die historische Abhandlung von E. GELCICH, Ztschr. f. Math. u. Phys. (hist. Abtg.) 33. 41. 81. 1888. — Die Anwendung auf das Billardspiel gaben MUSCHENBROEK und — weit vollständiger — v. CORIOLIS, Théorie math. des effets du jeu de billard. Paris 1835. Die neuere Literatur s. w. u.

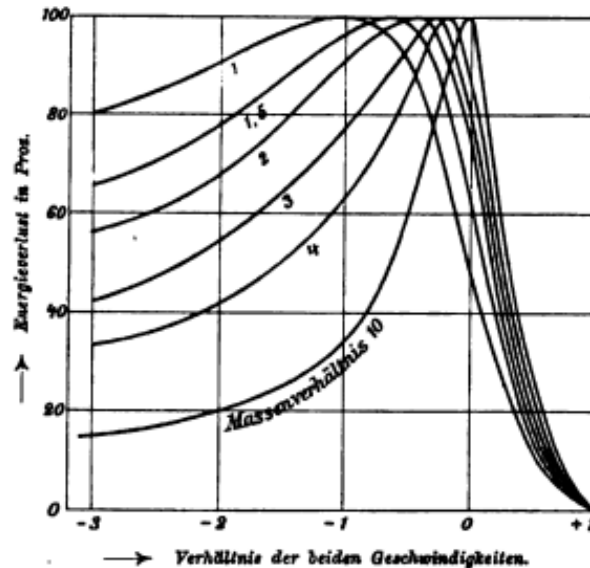
Kugeln von verschiedenen Massen mit entgegengesetzten, ihren Massen umgekehrt proportionalen Geschwindigkeiten aufeinander ( $m_1 c_1 = -m_2 c_2$ ), so kommen sie zum Stillstand. Stoßen zwei Kugeln von gleichen Massen mit verschiedenen Geschwindigkeiten aufeinander, so bewegen sie sich mit dem arithmetischen Mittel der Geschwindigkeiten weiter. Da der Stoß die unelastischen Körper teils erwärmt, teils dauernd deformiert, so leistet er Arbeit; ein Teil der kinetischen Energie muß also verloren gehen, und zwar findet man diesen Verlust

$$\frac{1}{2}(m_1 c_1^2 + m_2 c_2^2) - \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (c_1 - c_2)^2$$

Der Verlust an kinetischer Energie ist also einerseits einer reinen Funktion der Massen, andererseits einer reinen Funktion der Geschwindigkeiten, nämlich dem Quadrat ihrer Differenz proportional; genauer: er ist gleich der kinetischen Energie einer Kugel, deren reziproke Masse die Summe der reziproken Kugelmassen und deren Geschwindigkeit die Differenz der Kugelgeschwindigkeiten ist. Der verhältnismäßige Verlust an kinetischer Energie endlich hängt nur von dem Verhältnis  $\delta$  der beiden Massen und dem Verhältnis  $\varepsilon$  der beiden Geschwindigkeiten ab und ist gleich

$$(3) \quad \frac{(1 - \varepsilon)^2}{(1 + \delta)(1/\delta + \varepsilon^2)}$$

Da diese Formel von eigenartigem Charakter ist, sind einige Werte in der folgenden Tabelle zusammengestellt, und in der Figur 254 veranschaulicht; in der Tabelle sind in der obersten Horizontalreihe die Geschwindigkeits-, in der linken Vertikalreihe die Massenverhältnisse angegeben, in



Figur 254.

den übrigen die zugehörigen Energieverluste in Prozenten:

	-3	-2	-1	-1/2	-1/3	-1/4	0	1/4	1/3	1
1	80	90	100	96	90	83	50	28	10	0
1/2	66	77	96	100	98	86	60	31	11	0
2	56	67	89	98	100	93	67	33	11	0
3	43	54	75	89	96	99	75	35	11	0
4	34	42	64	80	90	100	80	36	10	0
10	16	20	33	51	59	86	91	72	7	0

In der Figur stellt jede Kurve den Energieverlust als Funktion des Geschwindigkeitsverhältnisses dar, die verschiedenen Kurven beziehen sich auf die verschiedenen Massenverhältnisse. Wie man sieht, sind die Kurven stark unsymmetrisch, und das Maximum ist desto steiler und desto weiter nach rechts verschoben, je verschiedener die Massen sind. Wenn das Geschwindigkeitsverhältnis dem Massenverhältnis entgegengesetzt reziprok ist, geht die ganze kinetische Energie verloren, die Kugeln bleiben, sich berührend, stehen.

b) Elastischer Stoß. Hier ist der eigentliche Vorgang des Stoßes damit, daß die beiden Körper ihre relativen Geschwindigkeiten gegen den Schwerpunkt,

$c_1 - c$  und  $c_2 - c$ , einbüßen, noch nicht beendet, der Druck der Körper aufeinander ruft nämlich deren Elastizität wach, und wenn diese eine vollkommene ist, so treibt sie die Körper mit dem gleichen, aber entgegengesetzten Drucke auseinander. Auf jene erste Periode der Berührung folgt also eine zweite, in der die relative Geschwindigkeit jeder der beiden Körper von null auf den dem ursprünglichen entgegengesetzten Wert steigt, d. h. auf  $c - c_1$  bzw.  $c - c_2$ . Die absoluten Geschwindigkeiten der Körper vom Augenblicke ihrer Trennung an sind also

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} v_1 = c + (c - c_1) = \frac{(m_1 - m_2)c_1 + 2m_2c_2}{m_1 + m_2} , \\ v_2 = c + (c - c_2) = \frac{(m_2 - m_1)c_2 + 2m_1c_1}{m_2 + m_1} . \end{array} \right.$$

Dasselbe Resultat erhält man, wenn man die Gleichungen (1) mit dem Prinzip von der Erhaltung der kinetischen Energie (Prinzip 15, p. 226), also mit der Gleichung

$$m_1 c_1^2 + m_2 c_2^2 = m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2$$

kombiniert, und umgekehrt findet man auch durch die Gleichungen (4) dieses Prinzip befriedigt, d. h. den Verlust an kinetischer Energie gleich null. Die relative Geschwindigkeit nach dem Stoße findet sich:  $v_1 - v_2 = c_2 - c_1$ , sie ist also der relativen Geschwindigkeit vor dem Stoße gleich und entgegengesetzt. Der Umsatz von Bewegungsgröße ist hiernach in der zweiten Periode ebensogroß wie in der ersten und im ganzen doppelt so groß wie bei unelastischen Körpern.

Ist  $m_1 < m_2$  und ruht einer der Körper vor dem Stoße, so wird:

wenn der schwere stößt, der leichte ruht:

$$(5a) \quad v_1 = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} c_2 , \quad v_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} c_2 ,$$

wenn der leichte stößt, der schwere ruht:

$$(5b) \quad v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} c_1 , \quad v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} c_1 .$$

Sind beide Körper in Bewegung, ihre Massen aber gleich, so wird besonders einfach

$$(5c) \quad v_1 = c_2 , \quad v_2 = c_1 ;$$

die Kugeln prallen also mit vertauschten Geschwindigkeiten auseinander oder, wie man auch sagen kann, sie verhalten sich so, als ob sie mit unveränderter Geschwindigkeit durcheinander hindurch gegangen wären. Stößt z. B. eine Kugel auf eine gleich schwere ruhende, so gibt sie ihre ganze Geschwindigkeit an diese ab und kommt selbst zur Ruhe. Stoßen zwei gleich schwere Kugeln mit gleichen, aber entgegengesetzten Geschwindigkeiten aufeinander, so prallen sie mit unveränderter Geschwindigkeit zurück.

**Unvollkommen elastischer Stoß.** In den beiden untersuchten extremen Fällen sind, wie man sieht, die Erscheinungen völlig verschieden. Sie werden aber vermittelt durch die Erscheinungen beim Stoße unvollkommen elastischer Körper oder, was im wesentlichen dasselbe ist, bei Stößen, deren Wirkung die Elastizitätsgrenze der Stoffe überschreitet. Die erste Periode der Berührung verläuft dann wieder ebenso wie in den beiden extremen Fällen, in der zweiten aber erlangen die Kugeln, wenn  $k$  ein echter Bruch ist, nur die relativen Ge-

schwindigkeiten  $k(c - c_1)$  bzw.  $k(c - c_2)$  wieder, ihre absoluten Geschwindigkeiten werden also

$$(6) \quad \begin{cases} v_1 = c + k(c - c_1) = \frac{(m_1 - k m_2) c_1 + (1 + k) m_2 c_2}{m_1 + m_2} \\ v_2 = c + k(c - c_2) = \frac{(m_2 - k m_1) c_2 + (1 + k) m_1 c_1}{m_1 + m_2} \end{cases}$$

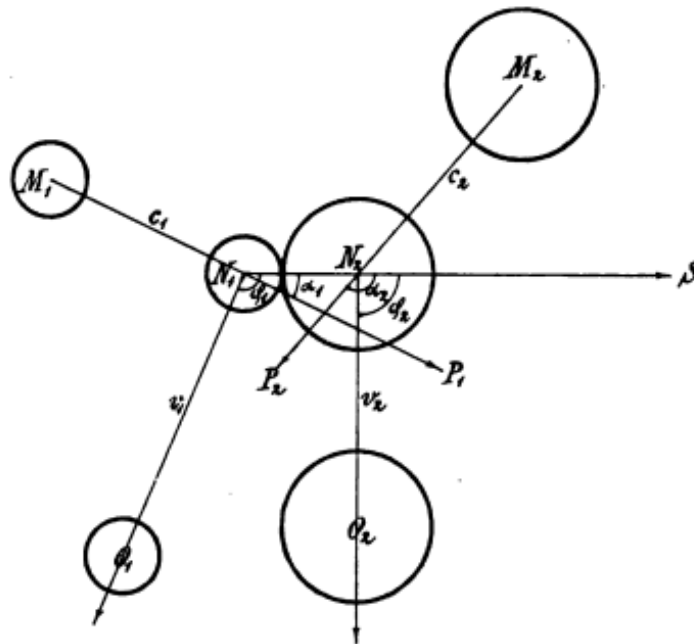
Die relative Geschwindigkeit nach dem Stoße wird

$$(7) \quad v_1 - v_2 = k(c_2 - c_1) \dots$$

also der ursprünglichen entgegengesetzt und gleich ihrem  $k$ -fachen. Dieser Bruch heißt<sup>1</sup> Restitutionskoeffizient. Für wollene Kugeln z. B. ist er nach NEWTON etwa 0,56, für gläserne etwa 0,94. Für  $k = 0$  erhält man wieder (2), für  $k = 1$  wieder (4).

Eine andere Klasse von Zwischenerscheinungen erhält man beim elastisch-unelastischen Stoße, d. h. dem Stoße zwischen einem als völlig elastisch und einem als völlig unelastisch betrachteten Körper.

**Schiefer Stoß.** Zu den Zahlengrößen kommen hier noch (Figur 255) die Winkel  $P_1 N_1 S = \alpha_1$  und  $P_2 N_2 S = \alpha_2$  hinzu, welche die Geschwindigkeiten  $c_1$  und  $c_2$ , und die Winkel  $O_1 N_1 S = \varphi_1$  und  $O_2 N_2 S = \varphi_2$ , welche die Geschwindigkeiten  $v_1$  und  $v_2$  mit der Stoßrichtung bilden (die Komplementwinkel bilden sie



Figur 255.

mit der Berührungsebene). Die Wirkung des Stoßes erstreckt sich nur auf die in die Stoßrichtung fallenden Komponenten, die man daher nach obigen Formeln zu behandeln hat; die anderen Komponenten bleiben, wenn keine Reibung vorhanden ist, unverändert; schließlich hat man wieder die Resultante zu bilden. Man erhält auf diese Weise:

<sup>1</sup> THOMSON und TAIT, Handbuch der theoretischen Physik. I. 236.

a) Für unelastische Körper, wenn man zur Abkürzung

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{m_1 c_1 \cos \alpha_1 + m_2 c_2 \cos \alpha_2}{m_1 + m_2} = K \\ \text{setzt:} \\ v_1 = \sqrt{K^2 + c_1^2 \sin^2 \alpha_1} \quad , \quad v_2 = \sqrt{K^2 + c_2^2 \sin^2 \alpha_2} \\ \text{tang } \varphi_1 = \frac{c_1 \sin \alpha_1}{K} \quad , \quad \text{tang } \varphi_2 = \frac{c_2 \sin \alpha_2}{K} \end{array} \right.$$

Die Kugeln trennen sich hiernach im allgemeinen nach dem Stoße wieder; sie bleiben nur zusammen, wenn  $v_1 = v_2$  und  $\varphi_1 = \varphi_2$  wird, also wenn die Anfangsgeschwindigkeiten sich umgekehrt wie die Sinus der Anfangsrichtungen verhalten, oder in dem Spezialfalle  $m_1 = m_2$ ,  $c_1 = c_2$ ,  $\alpha_1 = -\alpha_2$ ; im letzteren gehen die vereinigten Kugeln in der Berührungsebene weiter. Ruht die zweite Kugel, so ist  $c_2 = 0$  und es wird:

$$(9) \quad K = \frac{m_1 c_1 \cos \alpha_1}{m_1 + m_2}, \quad v_1 = \sqrt{K^2 + c_1^2 \sin^2 \alpha_1}, \quad v_2 = K, \quad \text{tang } \varphi_1 = \frac{c_1 \sin \alpha_1}{K}, \quad \text{tang } \varphi_2 = 0;$$

die getroffene Kugel geht also in der Stoßrichtung ab, und zwar desto langsamer, je schiefer sie getroffen wurde.

b) Für elastische Körper, wenn man zur Abkürzung

$$\frac{(m_1 - m_2) c_1 \cos \alpha_1 + 2 m_2 c_2 \cos \alpha_2}{m_1 + m_2} = K_1 \quad , \quad \frac{(m_2 - m_1) c_2 \cos \alpha_2 + 2 m_1 c_1 \cos \alpha_1}{m_1 + m_2} = K_2$$

setzt:

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} v_1 = \sqrt{K_1^2 + c_1^2 \sin^2 \alpha_1} \quad , \quad v_2 = \sqrt{K_2^2 + c_2^2 \sin^2 \alpha_2} \\ \text{tang } \varphi_1 = \frac{c_1 \sin \alpha_1}{K_1} \quad , \quad \text{tang } \varphi_2 = \frac{c_2 \sin \alpha_2}{K_2} \end{array} \right.$$

Für gleiche Massen wird:

$$v_1 = \sqrt{c_1^2 \sin^2 \alpha_1 + c_2^2 \cos^2 \alpha_2} \quad , \quad v_2 = \sqrt{c_1^2 \cos^2 \alpha_1 + c_2^2 \sin^2 \alpha_2} \quad , \\ \text{tang } \varphi_1 = \frac{c_1 \sin \alpha_1}{c_2 \cos \alpha_2} \quad , \quad \text{tang } \varphi_2 = \frac{c_2 \sin \alpha_2}{c_1 \cos \alpha_1} \quad ,$$

und wenn auch noch  $c_1 = c_2$ ,  $\alpha_1 = -\alpha_2$  ist, so laufen die Kugeln mit vertauschten Richtungen weiter. Wenn die gestoßene Kugel vorher ruht, so wird allgemein

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} K_1 = \frac{(m_1 - m_2) c_1 \cos \alpha_1}{m_1 + m_2} \quad , \quad v_1 = \sqrt{K_1^2 + c_1^2 \sin^2 \alpha_1} \quad , \\ v_2 = K_2 = \frac{2 m_1 c_1 \cos \alpha_1}{m_1 + m_2} \quad , \quad \text{tang } \varphi_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1 - m_2} \text{ tang } \alpha_1 \quad , \quad \text{tang } \varphi_2 = 0 \quad . \end{array} \right.$$

Auch hier geht die getroffene Kugel in der Stoßrichtung, aber doppelt so schnell wie die unelastische, fort; insbesondere bei gleichen Massen wird

$$v_1 = c_1 \sin \alpha_1 \quad , \quad v_2 = c_1 \cos \alpha_1 \quad , \quad \text{tang } \varphi_1 = \infty \quad , \quad \text{tang } \varphi_2 = 0 \quad ;$$

die stoßende Kugel geht also in der Berührungsebene, die gestoßene in der Stoßrichtung, mithin beide rechtwinklig gegeneinander weiter.<sup>1</sup>

c) Beim elastisch-unelastischen Stoße und beim Stoße unvollkommen elastischer Körper treten wieder gewisse mittlere Erscheinungen auf.

<sup>1</sup> Etwas andere Formeln entwickelt F. RE, Riv. scient.-industr. 27. 107, 1895.

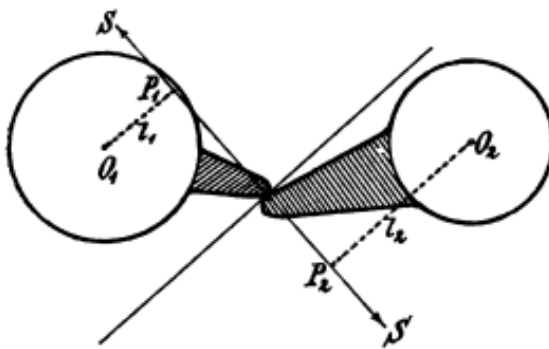
die Stoßrichtung zu reduzieren, indem man sie mit den Quadraten der Trägheitsradien  $r_1$  und  $r_2$  multipliziert und (Figur 257) mit den Quadraten der von den Achsen auf die Stoßrichtung gefällten Lote  $O_1 P_1 = l_1$  und  $O_2 P_2 = l_2$  dividiert. Sind dann die Winkelgeschwindigkeiten vor dem Stoße  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$ , so sind sie nach dem Stoße

$$(12) \quad \begin{cases} w_1 = \varepsilon_1 - l_1 (l_1 \varepsilon_1 - l_2 \varepsilon_2) (1 + k) \frac{m_2 r_2^2}{m_1 r_1^2 l_2^2 + m_2 r_2^2 l_1^2} \\ w_2 = \varepsilon_2 + l_2 (l_1 \varepsilon_1 - l_2 \varepsilon_2) (1 + k) \frac{m_1 r_1^2}{m_1 r_1^2 l_2^2 + m_2 r_2^2 l_1^2} \end{cases}$$

wo für unelastische Körper  $k = 0$ , für vollkommen elastische  $k = 1$ , für unvollkommen elastische  $k$  ein echter Bruch ist. Trifft ein freier Körper auf einen drehbaren, so sind nur für letzteren die bezeichneten Substitutionen zu machen, es wird also

$$(13) \quad \begin{cases} v_1 = c_1 - (c_1 - l_2 \varepsilon_2) (1 + k) \frac{m_2 r_2^2}{m_1 l_2^2 + m_2 r_2^2} \\ w_2 = \varepsilon_2 + l_2 (c_1 - l_2 \varepsilon_2) (1 + k) \frac{m_1}{m_1 l_2^2 + m_2 r_2^2} \end{cases}$$

Durch Spezialisierung erhält man hieraus den Stoß eines freien auf einen drehbaren, ruhenden Körper und den Stoß eines rotierenden Körpers auf einen freien ruhenden.



Figur 257.

**Exzentrischer Stoß zwischen freien Körpern.** Die Wirkungen des exzentrischen Stoßes lassen sich zusammensetzen aus der Wirkung eines zentralen Stoßes zwischen den beiden Körpern und der Wirkung, die ein Stoß zwischen ihnen haben würde, wenn sie nur um ihre Schwerpunkte drehbar wären; die Darstellung der Formeln würde indessen hier zu weit führen.

Noch weit verwickelter gestaltet sich natürlich das ganz allgemeine Problem des Stoßes im Raume, da hier zwölf Geschwindigkeits- und sechs Drehungskomponenten in Betracht kommen.

**Mitwirkung der Reibung.** Bisher ist angenommen worden, daß die beiden Körper vollkommen glatt sind, so daß die im Berührungspunkte auftretenden Widerstandskräfte immer senkrecht stehen auf der gemeinsamen Berührungsebene. Es soll nun untersucht werden, wie sich der Vorgang bei rauhen Körpern gestaltet. Dieses Problem ist schon von POISSON in Angriff genommen, von CORIOLIS verfolgt, aber erst von PHILIPPS, DARBOUX und ROUTH allgemein behandelt worden. Da die Arbeiten dieser Forscher indessen von wesentlich mathematischem Charakter sind und das Physikalische des Problems wenig hervortreten lassen, hat SZILY eine neue Bearbeitung geliefert, von der das folgende eine kurze Darstellung gibt.

Der Einfachheit halber wird der Stoß eines rauhen, aber unelastischen Körpers in der Ebene  $xy$  gegen eine zu dieser Ebene normale, ebene Wand  $x = 0$  betrachtet; die anderen Fälle lassen sich dann leicht sekundär ableiten. Sind  $u, v$  die Geschwindigkeitskomponenten des Schwerpunktes,  $\omega$  die Winkelgeschwindigkeit um die  $x$ -Achse,  $u_0, v_0, \omega_0$  ihre Anfangswerte, sind ferner  $N$  und  $F$  der Normal- und Tangentialimpuls im Berührungspunkte,  $U$  und  $V$  dessen Normal- und

Tangential(Gleit-)geschwindigkeit, ist endlich  $\eta$  der Reibungskoeffizient und  $k$  der Trägheitsradius, so gelten die Grundgleichungen:

$$(14) \quad \begin{cases} m(u - u_0) = N & , & m(v - v_0) = F & , & m k^2 (\omega - \omega_0) = N y - F x & , \\ U = u + y \omega & , & V = v - x \omega & , & & \end{cases}$$

also durch Kombination, wenn zur Abkürzung

$$a = \frac{1}{m} \left( 1 + \frac{x^2}{k^2} \right) & , & b = \frac{1}{m} \left( 1 + \frac{y^2}{k^2} \right) & , & c = \frac{1}{m} \frac{xy}{k^2} = \sqrt{\left( a - \frac{1}{m} \right) \left( b - \frac{1}{m} \right)} & , \\ U_0 = -(u_0 + y \omega_0) & , & V_0 = v_0 - x \omega_0 & & & \end{cases}$$

gesetzt wird, die Gleichungen:

$$(15) \quad U = -U_0 - cF + bN & , & V = V_0 + aF - cN & ,$$

wo  $a, b, c, U_0, V_0$  die Konstanten des Stoßes sind und  $N$  und  $F$  zu ermitteln sind; ihre Endwerte  $N_1$  und  $F_1$  geben die Lösung des Problems. Es sind nun, je nach der Lage des Schwerpunktes diesseits, in oder jenseits der Normale des Stoßes, drei Fälle möglich:  $c > 0$ ,  $c = 0$  und  $c < 0$ . Im ersten Falle sind wieder drei Unterfälle zu unterscheiden, in dem ersten dauert das anfangs bestehende Gleiten während des ganzen Stoßes fort, im zweiten wird es während des Stoßes null und bleibt null, im dritten wird es während des Stoßes null, tritt aber noch während der Stoßdauer wieder auf; der erste Unterfall tritt ein, wenn

$$(16) \quad \frac{V_0}{U_0} = \tan \varphi \geq \frac{a\eta + c}{c\eta + b}$$

ist, wo  $\varphi$  der Stoßwinkel ist; seine Grenzwerte ergeben besondere Spezialerscheinungen; im zweiten und dritten Unterfalle gilt dieselbe Beziehung mit dem Zeichen  $<$ . Im ersten Unterfalle erhält man:

$$(17) \quad N_1 = \frac{U_0}{c\eta + b} & , & F_1 = -\eta \frac{U_0}{c\eta + b} & ,$$

also, wie es während des Bestehens des Gleitens sein muß,  $F_1 = -\eta N_1$ ; im zweiten Unterfalle dagegen wird:

$$(18) \quad N_1 = \frac{aU_0 - cV_0}{ab - c^2} & , & F_1 = \frac{cU_0 - bV_0}{ab - c^2} & ;$$

wie man sieht, ist hier das Ergebnis völlig unabhängig vom Reibungskoeffizienten, und unter Umständen überhaupt identisch mit dem für glatte Körper gültigen. Im dritten Unterfall endlich erhält man:

$$(19) \quad N_1 = \frac{(a\eta + c)U_0 - 2c\eta V_0}{(a\eta + c)(b - \eta c)} & , & F_1 = \frac{(a\eta + c)U_0 - 2b\eta V_0}{(a\eta + c)(b - \eta c)} & ;$$

hier ist also der Reibungskoeffizient wieder maßgebend, aber es besteht keine einfache Beziehung zwischen  $N_1$  und  $F_1$ , es kann sogar das letztere positiv, null oder negativ sein, und in jedem dieser drei Fälle ergeben sich Besonderheiten des Phänomens. Soweit der erste Hauptfall. Im zweiten,  $c = 0$ , hat die Reibung keinerlei Einfluß auf  $U$ , der Stoß endet einfach, wenn  $U = 0$  ist, es ist daher  $N_1 = U_1/b$ , und  $F_1$  ist hiervon das  $-\eta$  fache oder weniger, je nachdem das Gleiten anhält oder aufhört. Im dritten Hauptfalle ergeben sich ganz ähnliche Möglichkeiten wie im ersten. In dem Sonderfalle  $U_0 = v_0 = 0$  (senkrechter Stoß) und  $\eta \geq c/a$  wird der Reibungskoeffizient einflußlos, der Stoß erfolgt so wie für vollkommen rauhe Körper.

Im vorstehenden ist die Frage so gestellt, daß der geometrische Zustand des Körpers für den Anfang als gegeben angesehen und der anfängliche



mechanische Zustand mit Rücksicht auf eine gewisse, erwartete Bewegung gesucht wird. Man kann aber auch umgekehrt verfahren, wozu nur eine entsprechende Analyse der obigen Formeln erforderlich ist; man findet alsdann sehr anschauliche Resultate; insbesondere ergeben sich als geometrischer Ort für die die obigen drei Hauptfälle trennenden Schwerpunktslagen gewisse Scharen von Hyperbeln, deren Brennpunkte und Asymptotenrichtungen durch Berührungspunkt, Reibungswinkel u. s. w. bestimmt sind; in den verschiedenen Fällen liegen diese Hyperbeln verschieden und desto schiefer, je größer die Reibung ist. Es muß jedoch an diesen Andeutungen genügen; und auch auf die Art und Weise, wie nun aus dem unelastischen der elastische und aus dem Stoße gegen eine Wand der Zusammenstoß zweier Körper abgeleitet wird, kann nicht eingegangen werden.

RESAL geht bei seiner Behandlung des Problems von der folgenden Hypothese aus: Zieht man von einem Punkte aus drei gerade Linien, die nach Richtung und Größe die Geschwindigkeiten darstellen, die irgend ein Teilchen eines der beider Körper vor und nach dem Stoße, sowie im Augenblick größter Zusammendrückung hat, so liegen ihre Endpunkte in einer geraden Linie. Diese Hypothese führt zu einer Gleichung, die den Verlust an kinetischer Energie als Summe zweier Glieder darstellt, ein vom Elastizitätsgrad (Restitutionskoeffizienten) und ein von der Reibung abhängiges. Die Folgerungen, die aus der Gleichung gezogen werden, führen zu Ergebnissen, die mit den obigen zum Teil nicht vereinbar sind, z. B. in bezug auf die Richtungskonstanz oder Richtungsänderung der Reibung während der Stoßdauer.

Endlich ist noch auf eine sehr elegante Arbeit von MAYER hinzuweisen, die sich an die von DARBOUX und ROUTH anschließt und sich die Aufgabe stellt, die Vorzüge beider miteinander zu vereinigen; insbesondere wird der von ROUTH eingeführte „darstellende Punkt“, der die Bewegung Schritt für Schritt zu verfolgen erlaubt, beibehalten, und es wird gezeigt, wie er sich verhält, wenn das Gleiten fort dauert, momentan aufhört oder dauernd aufhört, d. h. in Rollen übergeht. Durch die ältere Arbeit von SZILY, die MAYER nicht gekannt zu haben scheint, sind seine Ergebnisse, soweit physikalisches Interesse in Betracht kommt, überholt.<sup>1</sup>

**Billard.** Die weiteste und eingehendste Ausgestaltung hat die elementare Theorie des Stoßes begrifflicherweise im Hinblick auf das Billardspiel erfahren; es liegen hierfür umfangreiche Monographien mathematischen Charakters vor von CORIOLIS, HEMMING und RESAL, sowie zahlreiche kleinere Abhandlungen.<sup>2</sup> Die Gesetze des elastischen Stoßes kommen hier in sehr mannigfaltiger Form zum Ausdruck, insofern es sich teils um geraden, teils um schiefen Stoß, teils um den Stoß des Queus gegen den Ball, teils um den Stoß des Balles gegen die Bande handelt; ferner, insoweit die Bälle außer ihrer fortschreitenden Bewegung im allgemeinen noch zwei verschiedene Drehbewegungen ausführen, nämlich die des Rollens (um eine horizontale Achse) und die des Kreisels (um eine vertikale Achse). Die Rollbewegung wird sogar wegen der Reibung auf dem Tuche einen wesentlichen Faktor des Phänomens ausmachen; bei hohem Stoße erfolgt kräftiges, bei mittlerem und tiefem schwächeres Vorwärtsrollen, bei ganz tiefem Rückwärtsrollen, und nur bei ganz bestimmter Stoßhöhe wird das Rollen gerade aufgehoben und reines Gleiten erzielt. Das Kreiseln andererseits tritt immer bei seitlicher Asymmetrie des Stoßes auf und kombiniert sich mit dem Rollen im allgemeinen

<sup>1</sup> S. D. POISSON, *Traité de Mécan.* 2. éd. Paris 1833. — G. CORIOLIS, a. a. O. — ED. PHILIPPS, *LIUV. Journ.* 14. 1849. — G. DARBOUX, *C. R.* 78. 1421. 1559. 1645. 1767; *Bull. sciences math.* (2) 4. 126. 1880. — E. ROUTH, *Rigid Dynamics.* 4. Aufl. London 1882. — K. v. SZILY, *Math. u. naturw. Ber. aus Ungarn.* 19. 283. 1901. — H. RESAL, *C. R.* 95. 547. 578. 615. 700. 745. 1882. — A. MAYER, *Leipz. Ber.* 54. 208. 327. 1902. — <sup>2</sup> G. CORIOLIS, *Th. math. des effets du jeu de billard.* Paris 1835. — G. W. HEMMING, *Billiards mathematically treated.* London 1899. — H. RESAL, *Comm. à la th. math. du jeu du billard.* (*LIUV. Journ.* (3) 9. 65. 1883). — Vergl. auch G. T. WALKER, Artikel „Spiel und Sport“ in der *Enzykl. d. math. Wiss.* IV. 1. II. p. 128. 1904.

zu komplizierter Rotation um variable Achsen. Rollen wie Gleiten hat wesentlichen Einfluß auf die Geschwindigkeit, einen noch größeren aber auf die Richtung der Bewegung; im allgemeinen wird sogar die Bahn krummlinig sein. Endlich ist von wesentlichem Einfluß die Höhe der Bande; bei neueren Billards liegt sie in  $\frac{7}{8}$  Radiushöhe, und damit in einer Höhe, die unter mittleren Verhältnissen geradlinige Bahn des reflektierten Balles erzeugt. In bezug auf die Einzelheiten muß auf die genannten Werke verwiesen werden.

## 2. Höhere Theorie.

Auf Grund der allgemeinen Elastizitätstheorie ist die Lehre vom Stoße zuerst, aber in unvollkommener und zum Teil anfechtbarer Weise von POISSON, NAVIER, CAUCHY, POINOT u. A. behandelt worden. Mehr als historisches Interesse können, von Sonderfragen (s. w. u.) abgesehen, heute im wesentlichen nur die Theorien und Entwicklungen von DE SAINT-VENANT, SEBERT und HUGONOT, F. NEUMANN, BOUSSINESQ, DARBOUX, FLAMANT, HERTZ und VOIGT<sup>1</sup> in Anspruch nehmen. Diese beziehen sich teils auf beliebige Körper, teils aber und in der Hauptsache auf zwei Körperformen: Zylinder und Kugeln; und in bezug auf die erstgenannte Form behandeln sie einerseits den longitudinalen, andererseits den transversalen Stoß. Gemeinsam ist allen der höheren Theorie angehörigen Untersuchungen im Gegensatz zu den elementaren, daß der Stoßvorgang selbst untersucht, also die in jedem Moment wirkende Kraft ermittelt und hieraus durch Integration über kleine Zeiträume der jeweilige Impuls gebildet wird. Dabei ergibt sich dann noch ein zweites, nämlich die Wellennatur des Stoßes, die im allgemeinen zur Folge hat, daß die Körper auch nach dem Stoße sich noch nicht wie starre Körper verhalten.

Was zunächst die Lehre von den Impulsen betrifft, so hat sie DARBOUX in sehr eleganter Form dargestellt. Er geht zunächst aus von Impulsen, d. h. Kraftintegralen über eine endliche Zeit, und stellt fest, daß sie die Änderung der Bewegungsgröße während dieser Zeit darstellen. Läßt man nun die Zeitdauer immer kleiner, die Kraft immer größer werden, wobei aber die Impulse endlich und unter einer gewissen Grenze bleiben, so kommt man zu dem Endfalle, wo der Körper in einem bestimmten Moment ohne Ortsänderung eine plötzliche Geschwindigkeitsänderung erfährt. Derartige Impulse bezeichnet DARBOUX als Perkussionen; es ist einleuchtend, daß die von endlichen Kräften, z. B. der Schwerkraft herrührenden Perkussionen null sind. Natürlich ist der Begriff der Perkussion nur eine Abstraktion, aber eine ebenso nützliche wie so viele andere in der Theorie. Es werden nun zuerst die drei Fälle des Körpers mit fester Achse, des Körpers mit festem Punkte und des völlig freien Körpers betrachtet und das Verhalten hinsichtlich der Perkussionen festgestellt. Alsdann wird die kinetische Energie untersucht, und es werden einige Fundamentalsätze für sie aufgestellt, z. B.: 1. Die Änderung der kinetischen Energie ist gleich der Summe der Arbeiten, die die Perkussionskräfte leisten würden, wenn die Geschwindigkeit

<sup>1</sup> S. D. POISSON, *Traité de Mécan.* 2. § 499. — M. CAUCHY, *Bull. soc. philom.* 1826. p. 180. — L. POINOT, *LIouv. Journ.* (2) 2. 1857; (2) 4. 1859. — H. DE SAINT-VENANT, *LIouv. Journ.* (2) 12. 237. 1867; *C. R.* 95. 359. 423. 1882. — B. DE SAINT-VENANT u. FLAMANT, *C. R.* 97. 127. 214. 281. 1883. — FLAMANT, *Journ. de l'Ecole polyt.* 59. 1890. — SEBERT u. HUGONOT, *C. R.* 95. 213. 338. 381. 775. 1882. — J. BOUSSINESQ, *C. R.* 94. 1044. 1882; 97. 154. 1883. — Vgl. auch H. RESAL, a. a. O. — F. NEUMANN, *Vorlesungen über die Theorie der Elastizität.* Leipzig 1885. p. 332 ff. (entstanden nach VOIGT in den fünfziger Jahren). — G. DARBOUX, *Bull. sciences math.* (2) 4. 126. 1880. — JOUKOWSKI, *LIouv. Journ.* (3) 4. 1878. — J. APPELL, *C. R.* 116. 1483; 1893. — W. VOIGT, *WIED. ANN.* 19. 43. 1883. — V. HAUSMANINGER, *ibid.* 25. 189. 1885. — H. HERTZ, *CRELLES Journ.* 92. 156. 1882; *Verh. Ver. Beförd. Gewerbfl.* 1882; *Ges.-Werke.* 1.

des Körpers während des ganzen Prozesses konstant und zwar gleich der geometrischen Summe der Anfangs- und Endgeschwindigkeit bleibe. 2. Der Verlust an kinetischer Energie ist gleich der der verlorenen Geschwindigkeit entsprechenden kinetischen Energie, vermindert um die doppelte Arbeit, die die Kräfte leisten würden, wenn die Geschwindigkeit während des ganzen Prozesses gleich der Endgeschwindigkeit bleibe. 3. Der Gewinn an kinetischer Energie ist gleich der der gewonnenen (oder verlorenen) Geschwindigkeit entsprechenden kinetischen Energie, vermehrt um das Doppelte der Arbeit, die die Kräfte leisten würden, wenn die Geschwindigkeit immer die Anfangsgeschwindigkeit bleibe. — Diese, zunächst für einen Massenpunkt aufgestellten Sätze lassen sich sinngemäß auch auf ganze Körper ausdehnen. Schließlich kann man, indem man von diesen Sätzen Anwendung macht auf den Zusammenstoß von Körpern, die elementare Theorie prüfen und vertiefen.

Über die Frage, inwieweit die LAGRANGESCHEN verallgemeinerten Gleichungen (vgl. p. 326) das Stoßproblem vollständig bestimmen, sei auf eine Abhandlung von APPELL hingewiesen; es zeigt sich, daß es darauf ankommt, ob die neuen, durch den Stoß kinzukommenden Verbindungen zwischen den Massenpunkten auch nach dem Stoße bestehen bleiben oder nicht; in jenem Falle (ballistisches Pendel) ist der Bewegungszustand nach dem Stoße bestimmt, in diesem (freie Körper) nicht.

**Longitudinaler Stoß von freien Zylindern.** Es wird vollkommene Elastizität vorausgesetzt und von sekundären Einflüssen abgesehen. Führt man Zylinderkoordinaten  $x, r, \theta$  ein, nennt die Verschiebungskomponenten entsprechend  $u, \varrho, \psi$  und drückt die Druckkomponenten, sowie die Elastizitätsgleichungen [Art. „Elastizität“, p. 524, Gleichung (76)] in diesen Koordinaten aus, so findet man bei Beschränkung auf die hier allein interessierenden Größen  $x$  und  $r$  bezw.  $u$  und  $\varrho$ , und wenn keine äußeren Kräfte wirken, die Gleichungen ( $\varepsilon$  Dichte,  $K$  und  $\Theta$  KIRCHHOFFSche Elastizitätskonstanten):

$$(20) \quad \begin{cases} \frac{\varepsilon}{K} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 2(1 + \Theta) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + (1 + 2\Theta) \left( r \frac{\partial^2 \varrho}{\partial x \partial r} + 2 \frac{\partial \varrho}{\partial x} \right) \\ \frac{\varepsilon}{K} \frac{\partial^2 \varrho}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \varrho}{\partial x^2} + 2(1 + \Theta) \left( \frac{\partial^2 \varrho}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial \varrho}{\partial r} \right) + (1 + 2\Theta) \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial r} \end{cases}$$

Diese Gleichungen kann man vereinfachen, wenn man  $u$  und  $\varrho$  in Potenzreihen von  $r$  entwickelt, beachtet, daß hierin nur die geraden Glieder vorkommen können, und von diesen nur die beiden ersten  $u = u_0 + u_2 r^2$ ,  $\varrho = \varrho_0 + \varrho_2 r^2$  beibehält, indem man sich auf dünne Zylinder beschränkt; es werden dann die Gleichungen:

$$(21) \quad \begin{cases} \frac{\varepsilon}{K} \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = 2(1 + \Theta) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + 4u_2 + 2(1 + 2\Theta) \frac{\partial \varrho_0}{\partial x} \\ \frac{\varepsilon}{K} \frac{\partial^2 \varrho_0}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \varrho_0}{\partial x^2} + 16(1 + \Theta)\varrho_2 + 2(1 + 2\Theta) \frac{\partial u_2}{\partial x} \end{cases}$$

Hierzu kommen die Anfangsbedingungen für  $t = 0$ :

$$(22) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = c_1 \text{ für } 0 < x < a_1, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = c_2 \text{ für } l_1 < x < l_1 + l_2,$$

( $l_1$  und  $l_2$  Längen der Stäbe, deren Dicke und Material gleich sei)

$$(22a) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ für } 0 < x < l_1 + l_2 \text{ (keine Spannung vorhanden)};$$

ferner für die von Druck freien Mantelflächen:

$$(23) \quad 2 u_2 + \frac{\partial \varrho_0}{\partial x} = 0 \quad , \quad (1 + 2 \Theta) \varrho_0 + \Theta \frac{\partial u_0}{\partial x} = 0 \quad ;$$

für die freien Endflächen ( $x = 0$  und  $x = l_1 + l_2$ )

$$(24) \quad X_n = 2 K \frac{1 + 3 \Theta}{1 + 2 \Theta} \frac{\partial u_0}{\partial x} = 0 \quad , \quad \text{also} \quad \frac{\partial u_0}{\partial x} = 0 \quad ;$$

endlich für die zusammenstoßenden Enden ( $x = a_1$ ):

$$(u_0)_1 = (u_0)_2 \quad \text{und} \quad \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} \right)_1 = \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} \right)_2 .$$

Die Gleichungen (21) und (23) führen zunächst, wenn zur Abkürzung

$$(25) \quad \frac{2 K}{\varepsilon} \frac{1 + 3 \Theta}{1 + 2 \Theta} = \omega^2$$

gesetzt wird, zu der Gleichung:

$$(26) \quad \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = \omega^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \quad ,$$

deren Lösung nach D'ALEMBERT eine elastische Doppelwelle mit der Geschwindigkeit  $\omega$  (Schallgeschwindigkeit), also:

$$(27) \quad u_0 = f(x + \omega t) + \varphi(x - \omega t)$$

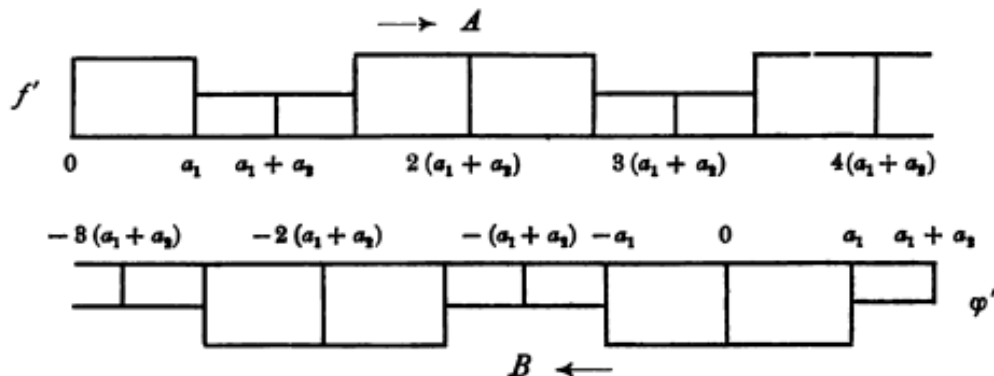
ist, wo die Funktionen  $f$  und  $\varphi$  sich aus (22) und (22a) bestimmen, nämlich zunächst, wenn  $f'$  und  $\varphi'$  die Ableitungen sind,

$$(28) \quad \begin{cases} f'(x) = \frac{1}{2} \frac{c_1}{\omega} \quad , \quad \varphi'(x) = -\frac{1}{2} \frac{c_1}{\omega} \quad (\text{für } 0 < x < l_1) \\ f'(x) = \frac{1}{2} \frac{c_2}{\omega} \quad , \quad \varphi'(x) = -\frac{1}{2} \frac{c_2}{\omega} \quad (\text{für } a_1 < x < l_1 + l_2) \quad , \end{cases}$$

und dann weiter für andere Argumente aus (24) durch die Gleichung

$$(29) \quad f'(\omega t) + \varphi'(-\omega t) = 0 \quad , \quad f'(l_1 + l_2 + \omega t) + \varphi'(l_1 + l_2 - \omega t) = 0 \quad ,$$

so daß  $f'$  und  $\varphi'$ , graphisch ausgedrückt, gebrochene gerade Linien werden (Figur 258 A und B).<sup>1</sup>



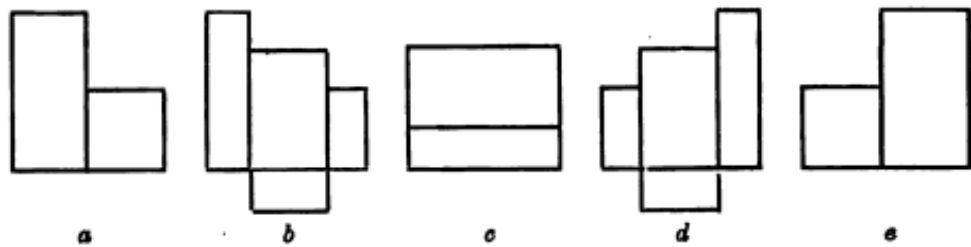
Figur 258.

<sup>1</sup> In den Figuren 258 bis 261 sind die Längen, statt mit  $l$ , mit  $a$  bezeichnet.

Schließlich wird die Geschwindigkeit

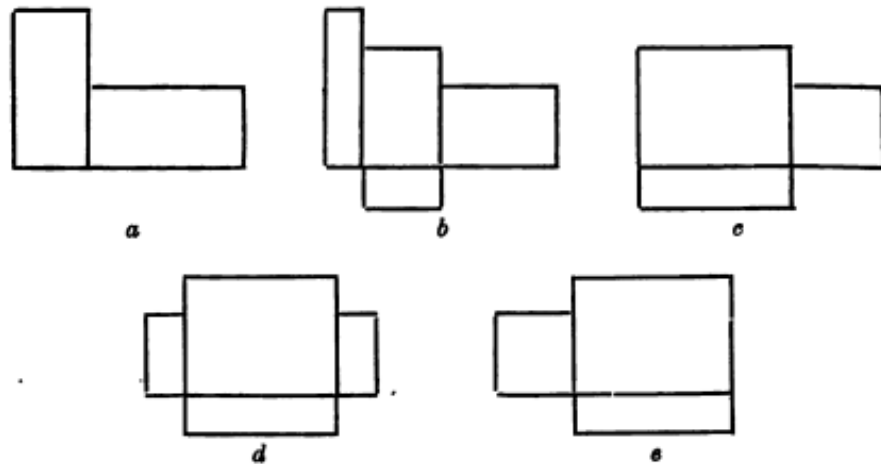
$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_0}{\partial t} = \omega [f'(x + \omega t) - \varphi'(x - \omega t)] \\ \text{und der Druck} \\ X_x = \varepsilon \omega^2 [f'(x + \omega t) + \varphi'(x - \omega t)] \end{array} \right.$$

Stellt man nach dem Vorgang von F. NEUMANN hiernach für die fünf Zeitpunkte  $\omega t = 0, \frac{1}{2}l_1, l_1, \frac{3}{2}l_1, 2l_1$  die Geschwindigkeiten durch Ordinaten über, die Drucke durch Ordinaten unter den die Stäbe repräsentierenden Abszissen dar, so erhält man bei zwei gleich langen Stäben die Figur 259 a bis e, bei



Figur 259.

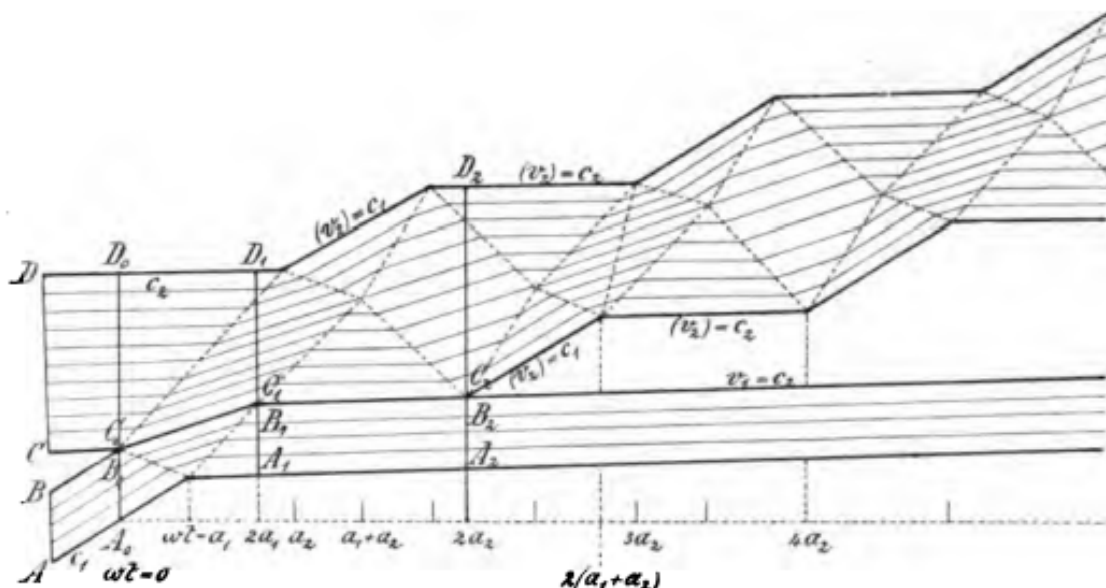
Stäben von  $l_2 = 2l_1$  die Figur 260 a bis e. Wie man sieht, findet im ersten Falle ein einfacher Austausch der Geschwindigkeiten statt, der zweite dagegen ist in jeder Hinsicht komplizierter, insbesondere besteht hier am Ende des Stoßes in dem längeren Stabe noch eine Spannung. Was das zur Folge hat, wird anschaulicher gemacht durch die von ST.-VENANT angewandte, eigentliche graphische Methode (Figur 261). Hier ist die Zeit die Abszisse, die Stäbe sind



Figur 260.

die Ordinaten, die starken Linien die „Zeitbahnen“ ihrer Endpunkte, die schwachen die der inneren Punkte der Stäbe, die Neigungen dieser Linien also die Geschwindigkeiten, ihre Abstände die Verdichtungen und Verdünnungen; endlich die gebrochenen Linien die Wellen.  $ABCD$  sind die Stäbe kurz vor dem Stoße,  $A_0B_0C_0D_0$  bei Beginn desselben ( $t = 0$ ). Jetzt dringt in jeden Stab eine Verdichtungswelle, welche das Ende des kürzeren  $l_1$  zur Zeit  $\omega t = l_1$  erreicht, dort reflektiert wird und zur Zeit  $\omega t = 2l_1$  wieder an die Stoßstelle gelangt; da im längeren Stabe noch Druck herrscht, geht sie in diesen über, bis sie sich mit

dessen eigener, zurückkehrender Welle trifft. Nunmehr entsteht eine Verdünnungswelle, welche, an der Stoßstelle zur Zeit  $\omega t = 2 l_2$  angelangt, nicht mehr in den kürzeren Stab übergeht (da hier seit der Zeit  $\omega t = 2 l_1$  kein Druck mehr besteht), sondern reflektiert wird. Wie man sieht, ist der Druck der Stäbe aufeinander



Figur 261.

schon zur Zeit  $t = 2 l_1 / \omega$  (Stellung  $A_1 B_1 C_1 D_1$ ), ihre Berührung aber erst zur Zeit  $t = 2 l_2 / \omega$  (Stellung  $A_2 B_2 C_2 D_2$ ) beendet. Ferner sieht man, daß der kürzere Stab als starres Ganzes weiter geht und zwar mit der Anfangsgeschwindigkeit  $c_2$  des längeren, daß dagegen der längere nicht aufhört, sich zu dehnen und zusammenzuziehen, so daß seine Endpunkte sich abwechselnd mit den Geschwindigkeiten  $c_1$  und  $c_2$  bewegen. Man kann also nicht von seiner Geschwindigkeit schlechthin, sondern nur von der seines Schwerpunktes sprechen; nennt man diese jetzt  $v_2$ , so findet sich

$$(31) \quad v_1 = c_2, \quad v_2 = c_2 + \frac{l_1}{l_2} (c_1 - c_2),$$

letzteres am einfachsten aus dem Prinzip von der Bewegung des Schwerpunktes. Hiernach tritt ein Verlust an kinetischer Energie der fortschreitenden Bewegung ein, welcher in Bruchteilen der ursprünglich vorhandenen

$$(32) \quad \left(1 - \frac{l_1}{l_2}\right) \frac{\left(1 - \frac{c_2}{c_1}\right)^2}{1 + \frac{l_2}{l_1} \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2}$$

ist, also am größten, nämlich gleich  $1 - \frac{l_1^2}{l_2^2}$  ist, wenn die Anfangsgeschwindigkeiten entgegengesetzt und umgekehrt proportional den Längen sind, andererseits null wird, wenn die Stäbe gleich lang sind; ein Fall, in welchem  $v_1 = c_2$ ,  $v_2 = c_1$  wird, in Übereinstimmung mit der mechanischen Theorie. Ruht der kürzere Stab  $a_1$  vor dem Stoße ( $c_1 = 0$ ), so wird

$$(33) \quad v_1 = c_2, \quad v_2 = c_2 \left(1 - \frac{l_1}{l_2}\right);$$

ruht der längere, so wird ( $c_2 = 0$ ):

$$(34) \quad v_1 = 0, \quad v_2 = \frac{l_1}{l_2} c_1.$$

Stellt man dieses Ergebnis, in Worte gekleidet, dem der mechanischen Theorie [Gleichungen (5)] gegenüber, so findet man:

#### Mechanische Theorie.

1. Bei gleich langen Stäben überträgt der stoßende seine ganze Geschwindigkeit auf den ruhenden und kommt selbst zur Ruhe.

2. Stößt der längere Stab, so überträgt er eine gesteigerte Geschwindigkeit auf den ruhenden und geht doch selbst noch langsam mit.

3. Stößt der kürzere Stab, so überträgt er einen Teil seiner Geschwindigkeit auf den längeren und springt selbst zurück.

#### Elastische Theorie.

1. Ebenso.

2. Stößt der längere Stab, so überträgt er seine volle Geschwindigkeit auf den ruhenden und geht selbst langsam mit (etwas schneller als nach der mechanischen Theorie).

3. Stößt der kürzere Stab, so überträgt er einen Teil seiner Geschwindigkeit (einen größeren als nach der mechanischen Theorie) auf den längeren und kommt selbst zur Ruhe.

Ähnlich verhält es sich bei Stäben von verschiedenem Querschnitt und verschiedenem Material, also verschiedenem  $\omega$ ; die hierfür von ST. VENANT entwickelten Formeln sind aber natürlich viel komplizierter, und es sei nur angeführt, daß dann beide Stäbe nach dem Stoße vibrieren.

**Theorie von Voigt und Hausmaninger.** Der Umstand, daß die beobachteten Werte der Geschwindigkeit (s. w. u.) stets zwischen den nach beiden Theorien, der mechanischen und der elastischen, berechneten Werten liegen, hat VOIGT auf eine Theorie geführt, die zwischen jenen beiden zu vermitteln sucht, und sie als Grenzfälle enthält. Es wird an die Tatsache angeknüpft, daß die Endflächen der Zylinder nicht vollkommen eben und nicht vollkommen glatt zu sein pflegen, sondern eine gewisse unbestimmbare Krümmung und trotz aller Politur immer noch eine gewisse Rauigkeit haben; es wird ferner an den besonderen Zustand der Oberflächenschicht fester Körper erinnert, der von dem des Innern vermutlich nicht unmerklich abweicht; endlich wird an die der Oberfläche anhaftende kondensierte Gasschicht gedacht und alles das zum Anlaß genommen, an der Berührungsstelle der Stäbe eine besondere Zwischenschicht anzunehmen, die gewissermaßen beiden Stäben zugleich angehört, die kleine Ausdehnung  $\lambda$ , den Querschnitt  $q$  und den mittleren Elastizitätsmodul  $\epsilon = dp \cdot \lambda / d\lambda$  ( $dp$  der Druckzuwachs auf die Flächeneinheit,  $d\lambda$  die hierdurch bewirkte Änderung von  $\lambda$ ) hat;  $\epsilon$  ist alsdann nicht bloß von der Natur der Stäbe, sondern auch von der Stärke des Stoßes abhängig. Setzt man zur Abkürzung  $c = \epsilon \cdot q / \lambda$ , so tritt die neue Grenzbedingung

$$(35) \quad E_1 q_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = c(u_2 - u_1) = E_2 q_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}$$

auf, wo  $E_1, E_2$  die beiden Moduln,  $q_1, q_2$  die Querschnitte der Stäbe sind; alles übrige in der Formulierung des Problems bleibt beim alten. Die Lösung wird als trigonometrische Summe dargestellt, und der zeitliche Periodizitätsfaktor ( $m_n$  in dem Ausdruck  $\cos m_n t$ ) muß eine gewisse transzendente Gleichung erfüllen. Allgemeine Schlüsse lassen sich aus dem Ergebnis nicht ziehen, da man die Konstante  $c$  nicht kennt; man muß sich also mit einigen speziellen Folgerungen begnügen.

Für  $c = \infty$  kommt man auf die NEUMANN-SAINTE-VENANTSche Theorie, für sehr kleines  $c$  auf die elementar mechanische Theorie, und zwar wird hier die allein maßgebende niedrigste Wurzel jener transzendenten Gleichung, wenn  $m_1$  und  $m_2$  die Massen der Stäbe sind:

$$(36) \quad m_0 = \sqrt{c \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)} ;$$

auch bewegen sich in diesem Falle die Stäbe starr, ohne Schwingungen weiter.

Die VOIGTSche Rechnung bezieht sich in ihrer Ausführung nur auf den Fall, daß die Stoßdauer groß gegen die Zeit ist, die eine Welle zum Durchlaufen eines Stabes braucht, d. h., daß die Strecke  $L$ , die eine Welle während der Stoßdauer zurücklegt, groß sei gegen die Stablänge  $l$ . Da nun Gründe für die Annahme vorliegen, daß bei den üblichen Versuchen das Verhältnis  $L:l$  nicht sehr groß ist, sondern nur wenige Einheiten ausmacht, hat HAUSMANINGER die VOIGTSche Theorie weitergeführt und dabei zwei methodische Änderungen vorgenommen: erstens an die Stelle der trigonometrischen Summe die willkürlichen Funktionen zu setzen, und zweitens von der Ableitung des allgemeinen Bildungsgesetzes dieser Funktionen abzusehen und statt dessen zu fragen, wie groß die VOIGTSche Konstante  $c$  gewählt werden muß, damit der Stoß zu Ende sei, wenn die Welle einen bestimmten, willkürlich festgesetzten Weg  $L$  durchlaufen hat; schließlich wurden dann die dazu gehörigen Endgeschwindigkeiten der Schwerpunkte der Stäbe berechnet, d. h. es wurde der Wert der Größe  $\beta$  in der Formel

$$(37) \quad v_1 = \beta c_1 + (1 - \beta) c_2$$

ermittelt. Das Resultat ist unter Beschränkung auf Stäbe von gleichem Stoffe in drei Tabellen zusammengestellt: 1. für gleich lange und dicke Stäbe für  $L = 2l$  bis  $8l$ ; 2. für Längen wie 2:1 und gleiche Dicken; 3. für Längen wie 2:1 und Dicken wie 1:2; in den beiden letzteren Fällen nur für  $L$ -Werte zwischen  $2l$  und  $8l$ . Einige wenige Werte seien hier mitgeteilt:

1.			2.		
$l_1 = l_2 = l, \quad q_1 = q_2 = q$			$l_1 = 2l_2 = l, \quad q_1 = q_2 = q$		
$c \frac{2l}{Eq}$	$L:l$	$\beta$	$c \frac{2l}{Eq}$	$L:l$	$\beta$
1150,69	2,001	0,00002	2308	2,000	0,4998
114,524	2,015	0,00022	9,21	2,005	0,4649
10,9074	2,154	0,00241	6,91	2,013	0,4282
4,0000	2,420	0,0065	4,61	2,051	0,3977
2,1569	2,776	0,0114	2,30	2,253	0,3509
1,2892	3,284	0,0145	0,90	3,000	0,3349
1,0200	3,608	0,0182			
0,8081	4	0,0088			
0,3035	6	0,00165			
0,1629	8	0,00052			

3.		
$l_1 = 2l_2 = l, \quad q_2 = 2q_1$		
$c \frac{2l}{Eq}$	$L:l$	$\beta$
23025	2,00	0,111
6,9	2,11	0,064
3,9	2,21	0,035
2,3	2,40	0,011
1,07	3,00	0,0036



Wie man sieht, gibt die erste Tabelle recht merkliche Abweichungen von der alten Theorie ( $\beta = 0$ ), namentlich in der Mitte; die zweite ergibt eine Abweichung der Größe  $\beta$  von dem Normalwerte  $1/3$  nur für sehr kleine  $L$ , schon für  $L = 3l$  ist jener Wert nahezu erreicht; ähnlich im dritten Falle, wo ebenfalls für  $L = 3l$  kaum noch eine Abweichung vorliegt.

**Stoß gegen einen festen Zylinder.** Dieses Problem ist insofern einfacher als das vorige, als es sich nur um den gestoßenen Zylinder handelt, komplizierter dagegen, weil die Funktionen  $f$  hier weit verwickelter sind. Die Grundgleichung ist wieder Gleichung (26), dazu kommen die Bedingungen:

$$\begin{aligned} \text{für } x = l \quad & \text{immer: } u = 0, \\ \text{für } t = 0 \quad & \text{überall: } u = 0, \\ \text{für } x = 0 \quad & \text{und } t = 0: \quad du/dt = C \text{ (Stoßgeschwindigkeit),} \\ \text{für } t = 0 \quad & \text{im übrigen: } du/dt = 0, \end{aligned}$$

für  $x = 0$  zwischen  $t = 0$  und  $t = T$  (Stoßdauer) als Ausdruck des Energiesatzes, wie sich leicht einsehen läßt ( $s$  das Verhältnis der gestoßenen zur stoßenden Masse):

$$(38) \quad \frac{d^2 u}{dt^2} = \frac{s}{l} \omega^2 \frac{du}{dx} ;$$

endlich für  $x = 0$  und  $t$  größer als  $T$ :  $du/dx = 0$ .

Die Lösung kann als unendliche Summe in der Form:

$$(39) \quad u = Cl \sqrt{\frac{\varepsilon}{E}} \sum \frac{2 \cos m}{m(m + \sin m \cos m)} \sin \frac{m x}{l} \sin \frac{m t}{l} \sqrt{\frac{E}{\varepsilon}} t$$

dargestellt werden, wo sich  $m$  als Wurzel der Gleichung:

$$(40) \quad m \tan m = s$$

bestimmt; und hiernach hatte ST.-VENANT Kurven entworfen, die die Abhängigkeit des  $u$  von  $x$  und  $t$  darstellen; sie sind später von FLAMANT ihres historischen Interesses halber veröffentlicht worden, obwohl sie nur auf den ersten fünf Gliedern von (39) bzw. Wurzeln von (40) beruhen und deshalb nur sehr beschränkte Gültigkeit haben. Überdies ist inzwischen von BOUSSINESQ ein geschlossener Ausdruck für die Lösung angegeben worden, und diesen haben ST.-VENANT und FLAMANT ebenfalls zeichnerisch zur Anschauung gebracht in Kurven, die natürlich exaktere Bedeutung haben. Die Lösung ist (ähnlich wie die NEUMANNsche):

$$(41) \quad u = f(\omega t - x) - f(\omega t + x - 2l) ,$$

aber die Funktion ist hier exponentiellen Charakters. Nennt man das Argument  $z$ , so hat die Funktion, solange  $z \leq \omega T$  ist, folgende Werte:

$$(42) \quad \left\{ \begin{aligned} f(z \leq 0) &= 0 \\ f(0 < z < 2) &= \frac{l}{s} \frac{C}{\omega} (1 - e^{-sz}) \\ f(2 < z < 4) &= f(0 < z < 2) + \frac{l}{s} \frac{C}{\omega} \{-1 + [1 + 2s(z-2)] e^{-s(z-2)}\} \\ f(4 < z < 6) &= f(2 < z < 4) + \frac{l}{s} \frac{C}{\omega} \{1 - [1 + 2s^2(z-4)^2] e^{-s(z-4)}\} \\ f(6 < z < 8) &= f(4 < z < 6) + \frac{l}{s} \frac{C}{\omega} \{-1 + [1 + 2s(z-6) - 2s^2(z-6)^2] \\ &\quad + \frac{2}{3} s^3(z-6)^3\} e^{-s(z-6)} \end{aligned} \right.$$

und entsprechend fortgesetzt. Sobald aber  $sl > \omega T$  geworden ist, wird einfach

$$(43) \quad f\left(z > \frac{\omega T}{l}\right) = -f(z - 2) + f\left(\frac{\omega T}{l}\right) + f\left(\frac{\omega T}{l} - 2\right),$$

und somit

$$(44) \quad f(z) = f(z + 4),$$

also einfach periodisch. Hiernach ist die Funktion  $f$  stets kontinuierlich. Dagegen ist der Differentialquotient  $f'(z)$  an den Stellen  $z = 2, 4, 6, 8 \dots$  unstetig, er springt nämlich hier von einem Minimum zu einem Maximum, und zwar um  $C/\omega$ .

Aus den Werten von  $f$  und  $f'$  lassen sich nun die Werte der Verrückung  $u$  sowie der linearen Dilatation  $D = du/dx$  ableiten. Die letztere ist anfangs immer negativ (Kompression), nimmt aber ab und erreicht in einem Intervall, das von dem Werte von  $s$  abhängt, den Wert null, womit der Stoß sein Ende erreicht. Und zwar findet man:

für  $s$  zwischen  $\infty$  und 0,5786:  $T$  zwischen  $\frac{2l}{\omega}$  und  $\frac{4l}{\omega}$ ,

für  $s$  zwischen 0,5786 und 0,241:  $T$  zwischen  $\frac{2l}{\omega}$  und  $\frac{6l}{\omega}$ ,

für  $s$  zwischen 0,241 und 0,136:  $T$  zwischen  $\frac{6l}{\omega}$  und  $\frac{8l}{\omega} \dots$

DE SAINT-VENANT und FLAMANT haben nun sechs Systeme von Kurven gezeichnet, die das Phänomen in höchst anschaulicher und vollständiger Weise wiedergeben, nämlich:

1. Die Ableitung  $f'$  für die  $s$ -Werte  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ , denen die Stoßdauern  $1/\omega$  mal 3,068, 4,709, 5,900 und 7,419 entsprechen.

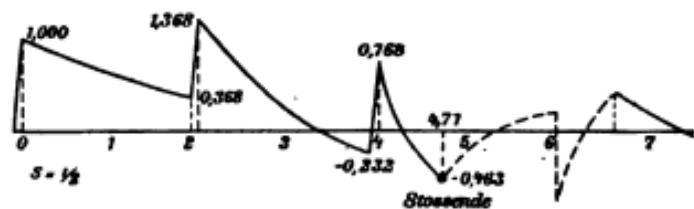
2. Die Funktionswerte  $f$  selbst für die  $s$ -Werte  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ .

3. Die Verrückungen  $u$  für dieselben drei Massenverhältnisse und in jedem dieser drei Fälle für die vier Punkte  $x/l = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$  des Stabes.

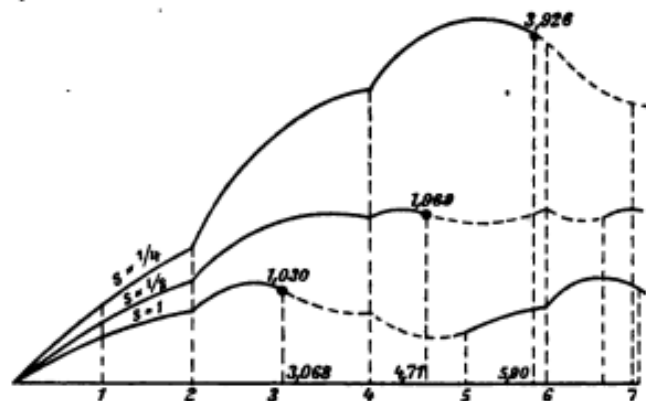
4. Die Dilatation  $du/dx$  für dieselben drei Massenverhältnisse und für die fünf Punkte  $x/l = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$  des Stabes.

5. Die Maximalverrückung des freien Endes als Funktion von  $s$ .

6. Die Maximaldilatation des festen Endes als Funktion von  $s$ .

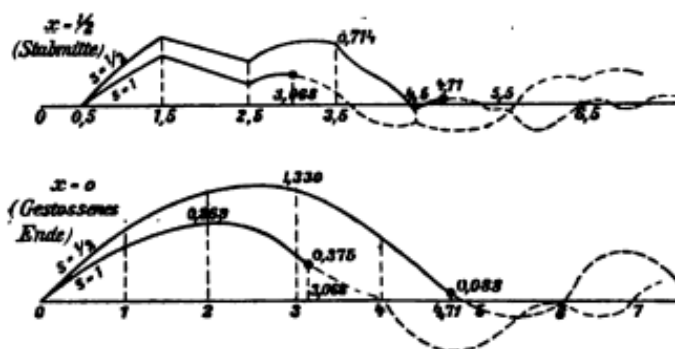


Figur 262.

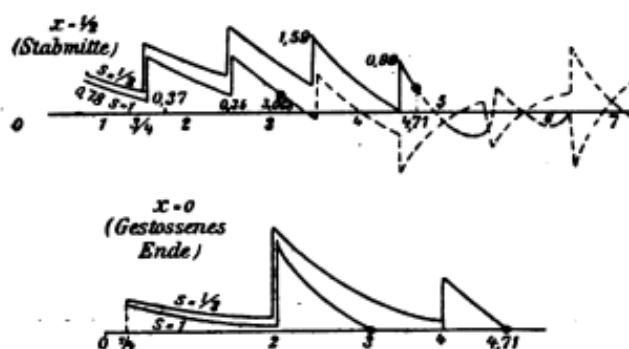


Figur 263.

Es muß hier genügen, eine kleine Auswahl aus diesen Kurven zu geben: Figur 262 stellt die Ableitung  $f'$  für die beiden Fälle  $s = \frac{1}{2}$  und  $s = 1$  dar,



Figur 264.



Figur 265.

Figur 263 die Funktion  $f$  selbst für die drei Fälle  $s = \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1$ ; Figur 264 die Verrückung  $u$  und Figur 265 die Dilatation  $du/dx$ , beide für die beiden Fälle  $s = \frac{1}{2}$  und  $s = 1$ , sowie für die Stoßstelle und die Stabmitte. Die Zahlen an der Grundlinie bedeuten überall Abszissen, d. h. im wesentlichen Zeiten, die ändern Zahlen sind Ordinaten; das Ende des Stoßes ist durch einen schwarzen Kreis markiert, die sich dann noch anschließenden Kurventeile, die gestrichelt sind, beziehen sich auf den freien Zustand nach dem Stoße. Es muß dem Beschauer der Kurven überlassen bleiben, die Fülle von Inhalt aus ihnen herauszulesen, den sie enthalten.

Aus der grundlegenden Abhandlung von BOUSSINESQ, die zu der obigen Darstellung den Anlaß gab, sei noch die angenäherte Formel

$$(45) \quad u(x=0) = \frac{Cl}{\omega s s'} \sin \frac{\omega t}{s'} \quad , \quad \left( s' = \sqrt{\frac{1}{s} + \frac{1}{3}} \right)$$

für die Verrückung des gestoßenen Endes sowie die für  $s < \frac{1}{2}$  angenähert richtige Formel für die Maximaldeformation.

$$(46) \quad \left( \frac{du}{dx} \right)_{\max} = \frac{C}{\omega} \left( 1 + \sqrt{\frac{1}{s}} \right)$$

angeführt, während für  $s > 5$  die Exponentialformel

$$(47) \quad \left( \frac{du}{dx} \right)_{\max} = \frac{2C}{\omega} (1 + e^{-2s})$$

angewandt werden muß.

**Transversaler Stoß von Zylindern.** Wenn der Zylinder nicht in der Endfläche, sondern am Mantel von dem stoßenden Körper getroffen wird, und infolgedessen nicht longitudinal, sondern transversal erregt wird, gestaltet sich das Problem begreiflicherweise viel komplizierter, da die Grundgleichung hier nicht von der zweiten, sondern von der vierten Ordnung (p. 735) ist. Zur Vereinfachung nimmt BOUSSINESQ an, der Stab sei unendlich lang und werde auf einer kleinen mittleren Strecke erregt; er findet dann für die Verrückung, wenn  $a$  das Produkt der Schallgeschwindigkeit  $\omega$ , der halben Dicke und eines Koeffizienten  $k$

ist, der für runden Querschnitt  $\frac{1}{2}$  ist, und wenn  $2\sigma$  das Verhältnis der erregenden Masse zu der der Längeneinheit des Stabes ist:

$$(48) \quad \left\{ \begin{aligned} v &= \int_0^{\infty} f \left( at - \frac{\lambda^2}{2} \right) \left( \cos \frac{x^2}{2\lambda^2} + \sin \frac{x^2}{2\lambda^2} \right) d\lambda \\ &- \sigma \int_0^{\infty} f \left( at - \frac{x^2}{2\lambda^2} \right) \sin \frac{\lambda^2}{2} d\lambda \end{aligned} \right. ,$$

wo die Funktion  $f$  sich durch die gegebene Funktion  $F(t)$ , die den Gang der Erregung angibt, gemäß der Formel ausdrückt:

$$(49) \quad f(at) = \frac{\sigma}{a\sqrt{\pi}} \left\{ \int_{-\infty}^t F(\Theta) d\Theta + \int_t^{\infty} e^{2\lambda \frac{t-\Theta}{\sigma^2}} F(\Theta) d\Theta \right\} .$$

Hieraus lassen sich gewisse Schlüsse in bezug auf die zulässige Beanspruchung des Stabes ziehen, der eigentliche Stoßvorgang bleibt aber ziemlich dunkel.

Andererseits kann man nach FLAMANT (im Anschluß an SAINT-VENANT) für einen endlichen Zylinder von der Länge  $2l$ , der an beiden Enden fest ist und in der Mitte mit der Geschwindigkeit  $C$  getroffen wird,

$$(50) \quad v = C \sqrt{\frac{\rho l^3}{2gEQ}} \sum \frac{4}{m^2} \frac{\frac{\sin \frac{mx}{l}}{\cos m} - \frac{\sin \text{hyp} \frac{mx}{l}}{\cos \text{hyp} m}}{\frac{1}{\cos^2 m} - \frac{1}{\cos \text{hyp}^2 m} + \frac{2}{m^2} \frac{\rho}{q}} \sin m^2 \sqrt{\frac{2gEQ}{\rho l^3}} t$$

setzen, wo  $Q$  das Trägheitsmoment des Querschnitts,  $\rho$  die gestoßene und  $q$  die stoßende Masse ist, und wo sich die Summierung über alle Wurzeln der Gleichung

$$(51) \quad m(\text{tg} m - \text{tg hyp} m) = \frac{2\rho}{q}$$

erstreckt. Hiernach hat FLAMANT unter Berücksichtigung der sieben ersten Wurzeln die Verrückung  $v$  für  $\rho/q = s = 2, 1, \frac{1}{2}$  graphisch dargestellt; man wird aber nach den Erfahrungen bei der Längsverrückung (s. o.) auf diese Werte nicht allzuviel Gewicht legen dürfen; und mit dem geschlossenen Ausdruck, der bessere Werte liefern würde, ist wegen seiner Komplikation, zumal bei seiner etwaigen Ausdehnung auf Stäbe von endlicher Länge, nichts anzufangen.

Unter diesen Umständen hat man versucht, auf indirektem, angenähertem Wege zu gewissen Vorstellungen über den Effekt des Querstoßes zu gelangen. Dahin gehört der Gedanke, den Stoß, nachdem er einmal erfolgt ist, als einen statischen Druck aufzufassen, die betreffende Gleichung anzuwenden und in die Anfangsbedingung die Stoßgeschwindigkeit einzuführen. Wir werden dieses, in England als COXSche Methode bezeichnetes Verfahren bei der HERTZSchen Behandlung des Stoßes von Kugeln wiederfinden.<sup>1</sup>

Schließlich ist auf den Zusammenhang unseres Problems mit dem der gehämmerten Saite oder des gehämmerten Stabes (p. 730 u. 737) hingewiesen, bei dem die Schlagdauer und die Natur des schlagenden Hammers von maßgebender Bedeutung ist.

<sup>1</sup> Vgl. E. A. H. LOVE, Th. of Elast., p. 420. — H. COX, Trans. Cambr. Soc. B. 1850.

**Theorie von Hertz für beliebige Körper.** Diese Theorie geht, wie eben schon bemerkt wurde, von der statischen Berührung der Körper unter Druck aus und macht erst zuletzt die Anwendung auf den Stoß. Sie geht also von den im Artikel „Zug und Druck“, p. 597 skizzierten Verhältnissen aus. Dabei wird der bei dem longitudinalen Stoße von Zylindern realisierte Fall, daß der Stoß sich auf zwei von vornherein endliche Ebenen erstrecke, glücklich vermieden, indem die beiden Oberflächen als konvex angenommen werden. Die Berührung im ersten Moment des Stoßes ist alsdann punktförmig, durch den Druck entsteht die Druckfläche als gemeinsame Fläche beider Körper; nur auf Punkte in ihr und in ihrer Nähe braucht sich die Betrachtung zu erstrecken. In bezug auf die statischen Formeln sei auf die zitierte Stelle verwiesen; hier genügt es, die Anwendung auf den Stoß zu machen. Sie ist offenbar nur unter zwei Voraussetzungen erlaubt: erstens, daß vollkommene Elastizität vorhanden sei, da sich sonst die Reibung als unterscheidend zwischen statischen und dynamischen Zustand einschleibt; und zweitens, daß die Zeit, während deren der Stoß die Körper in Berührung miteinander bringt, groß sei gegen die Zeit, in der Längswellen die Körper durchlaufen — eine Annahme, die offenbar nur in seltenen Fällen, nämlich für sehr kurze Körper und sehr kleine Stoßgeschwindigkeiten, erfüllt sein wird.

Die „Annäherung“ — dort  $\alpha$ , jetzt  $\varepsilon$  genannt — der beiden Körper, für die dort die Formel (79) oder, durch die Exzentrizität der Druckellipse  $e$  ausgedrückt, die Formel

$$(52) \quad \varepsilon = \frac{3p}{8\pi} \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{a} \int_0^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{z(1+z)(1-e^2+z)}}$$

gefunden wurde, ist hier eine Funktion der Zeit, ebenso wie der Druck  $p$ , und es besteht die Beziehung

$$(53) \quad p = k_2 \varepsilon^{3/2}$$

wo  $k_2$  bestimmt ist durch

$$(54) \quad \frac{9}{64\pi^2} k_2^2 A(\vartheta_1 + \vartheta_2)^2 \left[ \int_0^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{z(1+z)(1-e^2+z)}} \right]^2 = \int_0^{\infty} \frac{dz}{(1+z)^{3/2} \sqrt{z(1-e^2+z)}}$$

Andererseits besteht für die zeitliche Änderung von  $\varepsilon$  die Gleichung:

$$(55) \quad \frac{d}{dt} \left( m_1 \frac{d\varepsilon}{dt} \right) = -p,$$

wo die  $m$  die Massen der Körper sind, oder auch, wenn

$$(56) \quad k_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}$$

gesetzt wird, die Gleichung

$$(57) \quad \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = -k_1 k_2 \varepsilon^{3/2}.$$

Ihr Integral kann, wenn  $c = (d\varepsilon/dt)_0$  die Stoßgeschwindigkeit ist, in der Form

$$(58) \quad \left( \frac{d\varepsilon}{dt} \right)^2 - c^2 = -\frac{4}{5} k_1 k_2 \varepsilon^{5/2}.$$

geschrieben werden.

Der Wert  $\varepsilon_1$  von  $\varepsilon$  für die größte Annäherung ist:

$$(59) \quad \varepsilon_1 = \left( \frac{5}{k_1 k_2} \right)^{1/5} \left( \frac{c}{2} \right)^{4/5}$$

und, in den Massen, Dichten, Elastizitätszahlen und Schallgeschwindigkeiten der beiden Körper ausgedrückt:

$$(60) \quad \varepsilon_1 = \left[ \frac{5 m_1 m_2 c^3 3 \sqrt{A}}{4 (m_1 + m_2) 4 \pi} \left\{ \frac{(1 - \mu_1)^2}{\omega_1^2 \varrho_1 (1 - 2 \mu_1)} + \frac{(1 - \mu_2)^2}{\omega_2^2 \varrho_2 (1 - 2 \mu_2)} \right\} \Omega \right]^{1/5},$$

wo

$$(61) \quad \Omega^2 \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)^{1/5} \sqrt{x(1-e^2+x)}} = \left[ \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)(1-e^2+x)}} \right]^2$$

ist. Ferner ist die Stoßdauer

$$(62) \quad T = 2 \int_0^{\varepsilon_1} \frac{d\varepsilon}{\sqrt{c^2 - \frac{5}{8} k_1 k_2 \varepsilon^{1/5}}} = 2 \frac{\varepsilon_1}{c} \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^{1/5}}} = \frac{4}{5} \sqrt{\pi} \frac{\varepsilon_1}{c} \frac{\Gamma(\frac{5}{6})}{\Gamma(\frac{19}{6})},$$

also nach den  $\Gamma$ -Tabellen

$$(63) \quad T = 2,943 \frac{\varepsilon_1}{c} = 2,943 \sqrt[5]{\frac{25}{16 c k_1^2 k_2^2}}.$$

**Anwendung auf Kugeln.** Sind die Radien  $r_1$  und  $r_2$ , so wird

$$(64) \quad k_2 = \frac{8}{3} \frac{1}{\vartheta_1 + \vartheta_2} \sqrt{\frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}}, \quad a = \sqrt{\varepsilon \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}},$$

$$(65) \quad \varepsilon_1 = \left[ \frac{15 c^3 (\vartheta_1 + \vartheta_2) m_1 m_2}{32 (m_1 + m_2)} \right]^{1/5} \left( \frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2} \right)^{1/5},$$

und hieraus erhält man die Stoßzeit. Speziell für zwei nach Stoff und Größe gleiche Kugeln wird:

$$(66) \quad T = 2,943 r \sqrt[5]{\frac{25 \pi^2 \varrho^3 (1 - \mu^2)^2}{8 c E^2}},$$

d. h. die Stoßzeit ist direkt proportional mit dem gemeinsamen Radius der Kugeln und der  $2/5$ . Potenz der Dichte, umgekehrt proportional der fünften Potenz der Stoßgeschwindigkeit und der  $2/5$ . Potenz des Eindringungsmoduls (p. 603). Endlich wird der Radius der Stoßfläche

$$(67) \quad f = r \sqrt[5]{\frac{5 \pi \varrho c^2 (1 - \mu^2)}{16 E}}.$$

**Besondere Theorien.** Zum Schlusse des theoretischen Teiles sei erwähnt, daß wiederholt Stoßtheorien auf Grund besonderer hypothetischer Vorstellungen entwickelt worden sind. Eine solche ist die Theorie von KORN, die von der Annahme eines inkompressiblen Kontinuums ausgeht, in dem sich zwei Teilchen befinden, die sehr großen Drucken gegenüber einer, wenn auch geringen, Kompression bzw. Dilatation fähig sind; es wird eine Art von Potential  $\varphi$  eingeführt und in eine Reihe entwickelt, beginnend mit einer Konstanten  $\varphi_0$ , einem Anziehungsgliede  $\varphi_1$ , invers mit dem Quadrat der Entfernung, einem Abstoßungsgliede  $\varphi_2$ , invers mit der fünften Potenz der Entfernung u. s. w. Man gelangt so zur richtigen Darstellung des vollkommen elastischen Stoßes.

Ferner sei auf eine Arbeit von BURBURY hingewiesen und schließlich auf die Rolle aufmerksam gemacht, die der Stoßvorgang in der kinetischen Theorie, besonders der Gase spielt; es muß aber genügen, in dieser Hinsicht auf die grundlegende Abhandlung von MAXWELL zu verweisen.<sup>1</sup>

### 3. Experimentelles.

**Stoßapparate.** Der erste derartige Apparat ist die von MARIOTTE<sup>2</sup> angegebene Perkussionsmaschine (Figur 266). In der jetzigen, brauchbarsten Form besteht sie aus einem in seinen Teilen verstellbaren Stativ, an dem Kugeln oder andere Körper mittels Fäden aufgehängt sind; für die Versuche über den geraden Stoß eignet sich die Aufhängung jeder Kugel an zwei schrägen Fäden, deren Ebene senkrecht auf der Bewegungs- und Stoßrichtung steht; für den schiefen Stoß ist die Aufhängung je an einem Faden erforderlich. Als Material eignet sich z. B. Lehm für unelastische, Elfenbein für vollkommen elastische, Blei für unvollkommen elastische Körper. Man kann hiermit die meisten obigen



Figur 266.

Versuche anstellen und findet die Theorie qualitativ, zum Teil aber auch quantitativ bestätigt. Durch Anbringung von mehr als zwei, z. B.  $n$  Kugeln, die sich im Ruhezustand sämtlich berühren, kann man auch die Fortpflanzung des Stoßes studieren. Trifft z. B. die erste Kugel die zweite mit der Geschwindigkeit  $c$ , so erhalten bei gleicher Größe und unelastischem Stoff alle Kugeln die gemeinsame Geschwindigkeit  $c/n$ ; bei vollkommen elastischem Stoffe dagegen kommt die erste zur Ruhe, die zweite bleibt in Ruhe, und die letzte springt mit der Geschwindigkeit  $c$  ab. Stoßen die beiden ersten Kugeln, so springen die beiden letzten ab u. s. w. Stößt von

jeder Seite eine, so springen diese beiden äußersten mit vertauschten Geschwindigkeiten zurück. Nehmen die Kugeln an Größe zu, und stößt die kleinste, so springen alle zurück und trennen sich voneinander; stößt die größte, so gehen sie nach vorwärts auseinander.

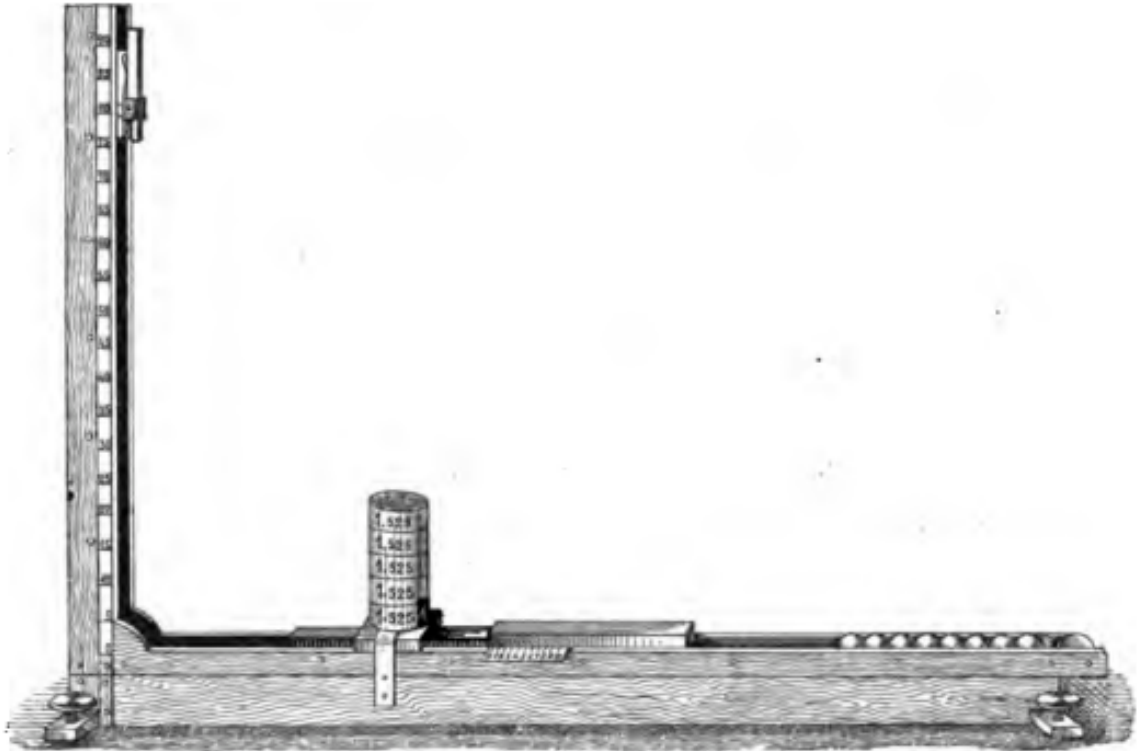
Eine Modifikation an dem Apparat hat PILLEUX vorgenommen, indem er die Kugeln, die erste ausgenommen, durch Würfel ersetzte, die sich mit je einer Fläche berühren. Je nach den Stoßgeschwindigkeiten zeigen sich hier verschiedene Sondererscheinungen, die sich zum Teil in einfacher Weise deuten lassen, zum Teil vom Verfasser zu besonderen Schlüssen über die inneren Vorgänge in den Körpern benutzt werden.

Andere, wesentlich für didaktische Zwecke bestimmte Apparate sind von HANDL und REICHEL. Der erstere besteht aus Holzwürfel und Bleikugel, beide

<sup>1</sup> A. KORN, Münch. Ber. 29. 223. 1893. — S. H. BURBURY, Proc. Roy. Soc. 50. 175. 1891. — J. CL. MAXWELL, Phil. Mag. (4) 19. 20; 20. 35. 1860. — <sup>2</sup> MARIOTTE, Traité de la percussion ou choc des corps. Paris 1677.

bifilar, aber jener mit parallelen, diese mit divergierenden Fäden aufgehängt; die den Würfel tragenden Fäden sind an einer drehbaren Scheibe, die die Kugel tragenden Fäden an einer verschiebbaren Leiste befestigt; auf diese Weise lassen sich alle Arten des Stoßes demonstrieren.

Endlich sei noch der in Figur 267 abgebildete Apparat von SEDLACZEK erwähnt; er hat gegenüber dem von MARIOTTE die Vorteile und Nachteile, die



Figur 267.

daraus sich ergeben, daß die Kugeln nicht hängen, sondern in Rinnen laufen. Bei der einfachen Stoßmaschine handelt es sich nur um qualitative Versuche, bei der zusammengesetzten, welche mit einer graduierten Fallröhre und einem Quadranten zur Umwandlung der vertikalen in horizontale Geschwindigkeit versehen ist, um quantitative Messungen.<sup>1</sup>

**Versuche über die Stoßgeschwindigkeit von Zylindern.** Wie man aus obigen Angaben entnimmt, stehen die Formeln, welche die mechanische Theorie einerseits und die elastische andererseits liefert, in schreiendem Widerspruch miteinander, und es fragt sich, wie sich das Experiment zu ihnen stellt. Derartige Versuche sind von VOIGT<sup>2</sup>, BOLTZMANN<sup>3</sup> und HAUSMANINGER<sup>4</sup> angestellt worden. Die Versuche von den letzteren beiden, auf Kautschukstäbe bezüglich, sind zu obigem Zwecke deshalb nicht geeignet, weil sie auch schon für zwei gleich lange Stäbe, für welche doch beide Theorien dasselbe Resultat (volle Übertragung der Bewegung auf den ruhenden Stab, Stillstand des stoßenden) liefern, von diesen abweichen. Von einem  $c_1 = 100$  verblieben nämlich für Stab 1 zirka  $v_1 = 14$ , und nur  $v_2 = 85$  wurden auf 2 übertragen; ebenso entsprechen dem Werte  $c_1 = 50$  die Werte  $v_1 = 6$ ,  $v_2 = 42$ . Ob diese Abweichung von beiden Theorien dem Kautschuk eigentümlich ist, wird erst noch zu entscheiden sein.

<sup>1</sup> M. PILLEUX, C. R. 94. 429. 1882. — A. HANDL, Ztschr. f. phys. Unterr. 1. 115. 1888. — O. REICHEL, ibid. 2. 265. 1889; 6. 197. 1893. — Vgl. auch R. HEYNE, ibid. 7. 73. 1893. — SEDLACZEK, POGG. ANN. 166. 476. 1875. — <sup>2</sup> W. VOIGT, WIED. ANN. 19. 43. 1883. — <sup>3</sup> L. BOLTZMANN, WIEN. BER. 84. 1225. 1881; WIED. ANN. 17. 343. 1882. — <sup>4</sup> V. HAUSMANINGER, WIEN. BER. 88. 768. 1883.



Dagegen ergaben die VOIGT'schen Versuche (Material: glasharter Stahl) für gleich lange Stäbe volle Übereinstimmung mit beiden Theorien. Für ungleich lange (aber gleich dicke) ist ein Teil der beobachteten Zahlen in folgender Tabelle mit den „mechanisch“ nach Formeln (5), in denen statt der Massen die Längen eingesetzt sind, berechnet, und mit den „elastisch“ nach (33 und 34) berechneten zusammengestellt. Die beobachteten Zahlen bedeuten eigentlich Ausschläge, können aber mit ziemlicher Genauigkeit auch den Geschwindigkeiten kurz vor bzw. nach dem Stoße proportional (und nach Multiplikation mit 2 sogar gleich) gesetzt werden; der Index 1 bezieht sich, in Übereinstimmung mit den genannten Gleichungen, stets auf den kürzeren Stab.

1. Gleich lange Stäbe:  $l_2:l_1 = 1$ .

$c_1$	beobachtet		mechanisch		elastisch	
	$v_1$	$v_2$	$v_1$	$v_2$	$v_1$	$v_2$
20	0	19,9	0	20	0	20
40	0	39,8	0	40	0	40
80	0	80,1	0	80	0	80
120	0	119,9	0	120	0	120
160	0	158,8	0	160	0	160

2. Ungleich lange Stäbe:  $l_2:l_1 = 1,5$ .

a) Lang stößt, kurz ruht.							b) Kurz stößt, lang ruht.						
$c_2$	beobachtet		mechanisch		elastisch		$c_1$	beobachtet		mechanisch		elastisch	
	$v_2$	$v_1$	$v_2$	$v_1$	$v_2$	$v_1$		$v_1$	$v_2$	$v_1$	$v_2$	$v_1$	$v_2$
20	8,9	23,5	4	24	6,7	20	20	- 3,6	16,2	- 4	16	0	13,3
40	7,9	47,0	8	48	13,3	40	40	- 7,6	31,7	- 8	32	0	26,7
80	16,8	93,5	16	96	26,7	80	80	- 13,9	62,9	- 16	64	0	53,3
160,4	35,3	187,4	32,1	192,5	53,3	160,4	160,8	- 25,5	124,0	- 32	128	0	106,7

3. Ungleichlange Stäbe:  $l_2:l_1 = 2$ .

a) Lang stößt, kurz ruht.							b) Kurz stößt, lang ruht.						
$c_2$	beobachtet		mechanisch		elastisch		$c_1$	beobachtet		mechanisch		elastisch	
	$v_2$	$v_1$	$v_2$	$v_1$	$v_2$	$v_1$		$v_1$	$v_2$	$v_1$	$v_2$	$v_1$	$v_2$
20	1,7	26,4	6,7	26,7	10	20	20	- 6,4	13,2	- 6,7	13,3	0	10
40	13,6	52,6	13,3	53,3	20	40	40	- 12,2	26,2	- 13,3	26,7	0	20
80,2	28,7	101,1	26,7	106,7	40,1	80,2	80,4	- 21,6	51,4	- 26,7	53,3	0	40,2
160,4	61,1	197,9	53,3	213,3	80,2	160,4	160,8	- 38,9	99,0	- 53,3	106,7	0	80,4

Wie man sieht, stimmt keine von beiden Theorien vollkommen, aber die mechanische stimmt sehr viel besser als die elastische; erstere gibt für kleine Geschwindigkeiten nur wenige (0—5), für größere etwas mehr Fehlerprozent; bei letzteren bewegen sie sich zwischen 14 und 72%, und von dem Zurückspringen des kürzeren Stabes gibt sie überhaupt keine Rechenschaft.

Was nun die Theorie von VOIGT betrifft, so stimmt sie insofern, als, wie sie verlangt, die beobachteten Endgeschwindigkeiten immer zwischen den von beiden älteren Theorien geforderten liegen; und da sie der mechanischen Theorie näher liegen, müßte man schließen, daß die Größe  $c$  nur kleine Werte hat; man könnte also die Anwendung machen auf kleine Stoßgeschwindigkeiten, also lange Stoßzeiten, d. h. auf große Werte des Verhältnisses  $L:l$ . Nun zeigt aber HAUSMANINGER, daß die Annäherung an die mechanische Theorie schon bei sehr mäßigen Werten dieses Verhältnisses, etwa bei 3:1, nahezu vollkommen erreicht ist; der Spielraum, in dem der Übergang von den tatsächlichen Verhältnissen,

wie sie die elementare Theorie darstellt, zu denen der Elastizitätstheorie stattfindet, ist also überaus eng, und er liegt außerhalb desjenigen, für den die VOIGTSche Theorie ursprünglich gilt. Man muß also sagen, daß diese Theorie die Frage in der Hauptsache noch nicht geklärt hat; ihr Wert liegt immerhin darin, daß sie die Brücke zwischen den alten Theorien hergestellt hat.

Schließlich sei noch auf zwei ergänzende Versuchsreihen hingewiesen, die VOIGT angestellt hat. Die eine von ihnen bezieht sich auf Zylinder, deren Endflächen mit besonderer Sorgfalt geebnet worden waren. Das Ergebnis ist, wie zu erwarten war, eine stärkere Abweichung der Geschwindigkeiten von der elementaren gegen die höhere Theorie hin. Die andere bezieht sich auf den Fall, daß Stäbe aus verschiedenem Material (Stahl und Glas) zusammenstoßen; sie zeigt wiederum in Übereinstimmung mit der Theorie, daß für kleine Stoßgeschwindigkeiten die elastische Natur des Materials ohne spezifischen Einfluß, die elementar-mechanische Theorie also ausreichend ist.

Die wenigen sonst noch vorliegenden Arbeiten über die Geschwindigkeit haben nur beschränkte Bedeutung. Erwähnt sei eine solche von VINCENT<sup>1</sup>, der Gummi- oder Stahlkugeln auf Platten aus verschiedenem Material fallen ließ und die Ergebnisse nach der Formel  $v = c(\alpha - \beta c)$  darstellte, wo  $\alpha$  und  $\beta$  Konstanten sind; die Formel muß aber für kleine  $c$  durch eine kompliziertere ersetzt werden.

**Stoßdauer.** Soweit die Frage der Geschwindigkeiten nach dem Stoße. Was andererseits den Vorgang des Stoßes selbst betrifft, so sind die drei wichtigsten ihn charakterisierenden Größen die Stoßdauer, die Stoßfläche und die Stoßtiefe.

Was zunächst die Stoßdauer betrifft, so hat die Theorie, insbesondere für zylindrische Stäbe, gezeigt, daß man im allgemeinen zwischen der kürzeren eigentlichen Stoßdauer, während deren die Stäbe aktiv aufeinander wirken, und der Berührungsdauer unterscheiden muß; diese letztere besteht aus der Stoßdauer und der sich an sie anschließenden Zeit, während deren die Stäbe noch passiv miteinander in Berührung bleiben. Ist  $l_1$  die Länge des kürzeren,  $l_2$  die des längeren Stabes, so ist die Stoßdauer  $T$  und die Berührungsdauer  $T'$ :

$$(68) \quad T = \frac{2l_1}{\omega} \quad , \quad T' = \frac{2l_2}{\omega} \quad ;$$

für gleich lange Stäbe wird  $T = T'$ . In Worten: die Stoßdauer zwischen Stäben, die sich nur durch die Länge unterscheiden, ist gleich der Zeit, die die Welle zum Hin- und Herweg durch den kürzeren Stab braucht oder auch gleich der ganzen Schwingungsdauer des longitudinalen Grundtons des kürzeren Stabes. Experimentell läßt sich die Stoßzeit auf elektrischem Wege nach der von POUILLET<sup>2</sup> angegebenen, von SCHNEIDER<sup>3</sup> modifizierten Methode bestimmen. Während des Stoßes findet der Schluß eines Stromes statt, der vor und nachher unterbrochen ist, und der einen der Zeitdauer des Schlusses proportionalen Galvanometerausschlag erzeugt; den absoluten Zeitwert dieser Ausschläge verschafft man sich vorher durch ihre Erzeugung mittels eines Pendels, das infolge einer Spitze, die unten angebracht ist, ebenfalls den Strom (denselben, der später benutzt werden soll) schließt, und zwar während einer Zeit, die sich in diesem Falle aus den Pendelgesetzen berechnen läßt. Ein wesentlicher Mangel dieser Methode, abgesehen davon, daß sie nur auf metallische Körper (auf andere nur mit bedenklichen Modifikationen) anwendbar ist, liegt darin, daß die Hauptbedingung, die Konstanz der Stromstärke, während des Stoßes infolge des wechselnden Übergangswiderstands zwischen den Körpern nicht streng erfüllt, und daß insbesondere nicht sicher ist, ob während der auf die Stoßzeit folgenden Kontaktzeit ohne Druck der Strom noch wirkt und in welchem Maße er dies tut. Die erhaltenen

<sup>1</sup> J. H. VINCENT, Proc. Camb. Phil. Soc. 10. 332. 1900. — <sup>2</sup> POUILLET, Pogg. Ann. 64. 1885. — <sup>3</sup> F. SCHNEIDER, ibid. 143. 239. 1871; 145. 328. 1872.

Zahlen werden also bei verschiedenen langen Stäben zwischen der Stoßzeit und der Kontaktzeit liegen. Für Zylinder erhielt HAMBURGER<sup>1</sup> folgende Resultate:

1. Die Stoßzeit fand sich bei Stahlzylindern von 100 bis 400 mm Länge je nach den übrigen Umständen zu 0,00057 bis 0,00071 sec, und speziell bei je 300 mm Länge zu etwa 0,0006 sec. Nach der Theorie sollte sie gleich  $2a/\omega = 2 \cdot 300/5000000 = 0,00012$  sec sein. Sie ist also in Wahrheit fünfmal so groß, und die Theorie erweist sich auch hier als hinfällig.

2. Die Stoßzeit wächst mit der Länge des stoßenden Stabes, aber sehr wenig (zwischen 100 und 400 mm um 6 $\frac{0}{0}$ ); nach der Theorie sollte sie der Länge des kürzeren Stabes proportional sein.

3. Die Stoßzeit wächst ein wenig mit der Dicke.

4. Die Stoßzeit nimmt ab, wenn die Stoßgeschwindigkeit wächst (zwischen 12 und 400 mm um 8 bis 15 $\frac{0}{0}$ ); von dieser Abhängigkeit gibt die Theorie gar keine Rechenschaft; die VOIGTSche tut es teilweise, soweit die in ihr vorkommenden Konstanten eine Vergleichung zulassen.

Für Kugeln liefert die Theorie von HERTZ für die Stoßdauer zwischen gleich großen und stofflich gleichen Kugeln die Formel (66). Die Beobachtungen von HAMBURGER und SCHNEEBELI liefern eine hiermit ziemlich gut übereinstimmende Abhängigkeit der Stoßzeit von Stahl- und Messingkugeln von  $R$  und  $c$ , und diese Übereinstimmung erstreckt sich einigermaßen auch auf die absoluten Werte von  $T$ . Bei Messingkugeln ( $R = 13$  mm,  $\rho = [8,4 \cdot 10^{-6} \cdot 9810^{-2}]$  in kg und mm,  $E = 10000$ ,  $\mu = \frac{1}{3}$ ) ergab sich z. B.

Geschwindigkeit	73,7	122,9	192,1	295 mm
Stoßzeit, berechnet . . .	0,000185	0,000167	0,000153	0,000140 sec
„ beobachtet . . .	0,000196	0,000173	0,000157	0,000148 sec

Der Kuriosität halber sei nach HERTZ angeführt, daß, während bei den dem Experiment zugänglichen Verhältnissen die Stoßzeit sehr klein ist, sie bei zwei Stahlkugeln von der Größe der Erde und einer Anfangsgeschwindigkeit von 10 mm nicht weniger als nahezu 27 Stunden betragen würde.

Eine andere Methode hat neuerdings NELJUBOW<sup>2</sup> angewandt; die ruhende Kugel war zur Erde abgeleitet, die stoßende mit einer auf ein bestimmtes Potential geladenen bekannten Kapazität verbunden; es wurde die Zeit bestimmt, während deren sich das Potential um einen gewissen Betrag vermindert. Für Stahlkugeln ergab sich gute Übereinstimmung mit der HERTZschen Formel, die die kleinen Abweichungen sollen sich durch die endliche Größe der Deformationen erklären; bei Kupfer- und Messingkugeln erhielt man zu stark schwankende Werte, um Schlüsse ziehen zu können.

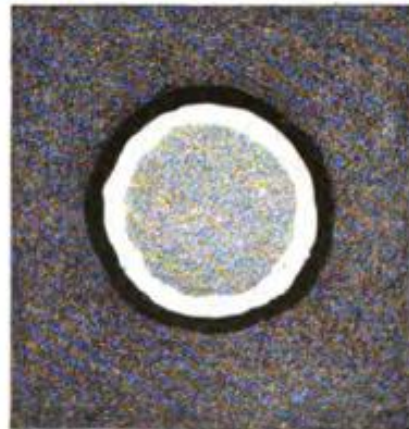
Schließlich ist noch eine umfangreiche Untersuchung von TAIT<sup>3</sup> anzuführen. Der stoßende Körper war ein fünf Pfund schwerer Holzkörper, der ruhende ein mit der Basis fest gekitteter, an der oberen Endfläche schwach gewölbter Zylinder aus Platanenholz, Guttapercha, Kautschuk oder Kork; der Holzblock fiel zwischen Leitschienen hernieder. Ein mit ihm verbundener Stift verzeichnete auf einer mit einem rotierenden Schwungrade verbundenen geschwärzten Glastafel außerhalb der Stoßzeit einen Kreis, während dieser dagegen eine den Kreis zu Anfang und Ende schneidende Kurve, so daß aus der Tourenzahl des Schwungrades die Stoßdauer ermittelt werden konnte. Die Kurve ließ sich, wenn  $r$  und  $\theta$  Polarkoordinaten sind, in der Form  $r = a + b\theta^3$  darstellen;  $a$  hat für jeden Rückprall und Rückfall denselben Wert, ändert sich aber von einem Falle zum nächsten;  $b$  da-

<sup>1</sup> M. HAMBURGER, Bresl. In.-Diss. 1885 u. WIED. Ann. 28. 653. 1886. — <sup>2</sup> W. NELJUBOW, Journ. russ. phys.-chem. Ges. 34. 561. 1902. — <sup>3</sup> P. G. TAIT, Proc. Edinb. Soc. 17. 172. 1889; Trans. Edinb. Soc. 36. 1. 225. 1891.

gegen hat für alle Fälle einen und für alle Rückpralle einen anderen gemeinsamen Wert. Bei einer Stoßgeschwindigkeit von 16 Fuß in der Sekunde schwankte die Stoßdauer zwischen  $\frac{1}{70}$  Sekunde für Kork,  $\frac{1}{130}$  für Kautschuk,  $\frac{1}{850}$  für Platanenholz bis zu  $\frac{1}{100}$  für Hartgummi. Bei Kork und Guttapercha zeigte sich die Anomalie, daß mit Verminderung der Stoßgeschwindigkeit bis auf acht Fuß die Stoßdauer zwar wuchs, bei weiterer Verminderung aber wieder abnahm.

**Stoßfläche.** Die zweite der für den Stoßvorgang charakteristischen Größen ist die Stoßfläche oder Druckfläche, d. h. diejenige Fläche, in der während des Zustands der stärksten Kompression Druckwirkung zwischen den Körpern besteht. Diese Fläche ist im allgemeinen gekrümmt und nur bei zwei nach Form und Stoff gleichen Körpern eine Ebene. Am interessantesten und zugleich am leichtesten festzustellen ist ihr Rand, die Stoßfigur oder Druckfigur. Nach der Theorie von HERTZ ist sie eine Ellipse, und speziell für Kugeln ein Kreis mit dem durch (67) bestimmten Radius; HERTZ selbst fand diese Formel für Glaslinsen und Glasplatten (und eine ähnliche für Glaszylinder, die sich längs eines Stückes der Mantelfläche berührten) durch Beobachtung mittels Rußüberzugs gut bestätigt. Für die von SCHNEEBELI aneinander gepreßten Kautschukugeln sollte  $f = 1,84$  mm sein, und in guter Übereinstimmung ergab das Experiment mit Hilfe von Färbung durch Platinchlorür  $f = 1,42$ ; beides bei  $p = 2000$  kg.

Nach der Formel soll der Radius der Stoßfläche dem Radius der Kugeln proportional sein und schwach wachsen mit der Geschwindigkeit des Stoßes, noch schwächer direkt mit der Dichte, verkehrt mit  $E$  und  $\mu$ . Ähnlich verhält es sich, wenn die beiden Kugeln von verschiedenem Radius und Material sind, wenn z. B. eine Kugel gegen eine ebene Platte stößt. Auch einige der hierauf bezüglichen Ergebnisse fanden SCHNEEBELI und HAMBURGER durch den Versuch (ersterer mittels paraffinierter Stahlkugeln, letzterer mittels Elfenbeinkugeln und berußten Glasplatten) bestätigt. Die (etwa zehnmal vergrößerte) Abbildung einer solchen Stoßfläche nach HAMBURGER (Figur 268) zeigt infolge der Dicke der Rußschicht den Unterschied zwischen Druckfläche und bloßer Berührungsfläche; auf ersterer (im inneren Kreise) ist der Ruß teilweise festgepreßt, auf letzterer ist er fast gänzlich fortgenommen (mittlerer Ring); endlich bildet sich außen noch ein Wall fortgeschleuderten Rußes; die wirkliche Stoßfläche ist die innerste Kreisfläche. — VINCENT (a. a. O.) findet für Kugeln, die auf Platten aufschlagen, den Durchmesser des Eindrucks proportional mit dem Kugelradius und mit der Quadratwurzel aus der Stoßgeschwindigkeit.



Figur 268.

**Kompression und Druck.** Diese letzten, für den Stoß charakteristischen Größen sind begrifflicher Weise am schwersten exakt zu messen, und es liegen darüber nur wenige Angaben vor. So findet VINCENT (a. a. O.) den Druck bei Blei und Paraffin auf den Kontaktflächen konstant, das Volumen des Eindrucks proportional mit der kinetischen Energie unmittelbar vor dem Stoße. — RINGELMANN<sup>1</sup>, der den Druck beim Aufschlagen durch ein selbstregistrierendes Dynamometer maß, fand, wenn  $m$  das Gewicht und  $c$  die Geschwindigkeit ist, den Druck  $p = 13,55 mc$  in Kilogrammen und Metern. — Schließlich sei auf eine Arbeit von SCHOENTJES<sup>2</sup> über die Deformationen von hohlen Halbkugeln durch Stöße hingewiesen, die jedoch mehr in die Lehre von der Festigkeit gehört.

<sup>1</sup> RINGELMANN, C. R. 137. 644. 1903. — <sup>2</sup> H. SCHOENTJES, Bull. Acad. Belg. (3) 20. 295. 1890.