H. Hertz, Über die Berührung fester elastischer Körper, Journal für die reine und angewandte Mathematik 92, 156-171 (1881)

Ueber die Berührung fester elastischer Körper.

(Von Herrn *Heinrich Hertz*.)

In der Theorie der Elasticität werden als Ursachen der Deformationen theils Kräfte, welche auf das Innere der Körper wirken, theils auf die Oberfläche wirkende Druckkräfte angenommen. Für beide Arten von Kräften kann der Fall eintreten, dass dieselben in einzelnen unendlich kleinen Theilen der Körper unendlich gross werden, so zwar, dass die Integrale der Kräfte über diese Theile genommen einen endlichen Werth behalten. Beschreiben wir alsdann um den Unstetigkeitspunkt eine geschlossene Fläche, deren Dimensionen sehr klein gegen die Dimensionen des ganzen Körpers sind, sehr gross hingegen im Vergleich zu den Dimensionen des Theils, in welchem die Kräfte angreifen, so können die Deformationen ausserhalb und innerhalb dieser Fläche ganz unabhängig von einander betrachtet werden. Ausserhalb hängen die Deformationen ab von der Gestalt des Gesammtkörpers, der Vertheilung der übrigen Kräfte und den endlichen Integralen der Kraftcomponenten im Unstetigkeitspunkte, innerhalb hängen sie nur ab von der Vertheilung der im Innern selbst angreifenden Kräfte. Die Drucke und Deformationen im Innern sind gegen die im Aeussern unendlich gross.

Im Folgenden wollen wir einen hierher gehörigen Fall behandeln, der praktisches Interesse hat*), den Fall nämlich, dass zwei elastische isotrope Körper sich in einem sehr kleinen Theil ihrer Oberfläche berühren, und durch diesen Theil einen endlichen Druck der eine auf den andern ausüben. Die sich berührenden Oberflächen stellen wir uns als vollkommen glatt vor, d. h. wir nehmen nur einen senkrechten Druck zwischen den sich berührenden Theilen an. Das beiden Körpern nach der Deformation gemeinsame Stück der Oberfläche wollen wir die Druckfläche, die Begrenzung

*) Vgl. *Winkler*, Die Lehre von der Elasticität und Festigkeit, Prag 1867; I, p. 43. *Grashof*, Theorie der Elasticität und Festigkeit, Berlin 1878; p. 49—54.

dieses Stücks die Druckfigur nennen. Die Fragen, deren Beantwortung uns naturgemäss zunächst obliegt, sind die nach der Fläche, von welcher die Druckfläche ein unendlich kleiner Theil ist*), die Frage nach der Form und absoluten Grösse der Druckfigur, die Frage nach der Vertheilung des senkrechten Drucks in der Druckfläche. Von Wichtigkeit ist die Bestimmung der Maximaldrucke, welche in den an einander gepressten Körpern vorkommen, insofern von diesen es abhängt, ob der Druck ohne bleibende Deformation ertragen wird; von Interesse ist endlich die Annäherung der beiden Körper, welche durch einen bestimmten Gesammtdruck hervorgerufen wird.

Als gegeben haben wir zu betrachten die beiden Elasticitätsconstanten eines jeden der sich berührenden Körper, die Form und gegenseitige Lage der Oberflächen in der Nähe des Berührungspunktes, endlich den Gesammtdruck. Unsere Maasse wollen wir so wählen, dass die Druckfläche endlich erscheint, dann gelten unsere Betrachtungen für das ganze endliche Gebiet, die Gesammtdimensionen der sich berührenden Körper aber haben wir uns als unendlich vorzustellen.

Wir denken uns zunächst die beiden Oberflächen in mathematische Berührung gebracht, und zwar so, dass die gemeinsame Normale parallel ist der Richtung des Druckes, welchen der eine Körper auf den andern ausüben soll. In der gemeinsamen Tangentialebene richten wir das orthogonale geradlinige System der x, y ein, dessen Nullpunkt der Berührungspunkt sein soll, die dritte senkrechte Coordinate heisse z. Der Abstand jedes Punktes der beiden Oberflächen von der Tangentialebene in der Nähe des Berührungspunktes, d. h. im ganzen endlichen Gebiet, wird durch eine homogene Function zweiten Grades in x und y dargestellt sein. Es wird daher auch der Abstand zweier correspondirenden Punkte der beiden Oberflächen durch eine solche Function dargestellt sein, und zwar wollen wir das System der x und y so drehen, dass aus der letztgenannten Function das Glied in xy wegfällt.

Wir können dann die Gleichungen der beiden Oberflächen schreiben:

*) Im Allgemeinen ändern sich die Krümmungsradien der Oberfläche eines deformirten Körpers nur unendlich wenig, in unserem speciellen Fall hingegen ändern sie sich um endliche Grössen, und hierin liegt die Berechtigung obiger Frage. Berühren sich z. B. zwei gleiche Kugeln von gleichem Material, so gehört die Druckfläche einer Ebene an, also einer Fläche, die von jeder der sich berührenden Oberflächen ihrer Natur nach verschieden ist.

$$z_1 = A_1 x^2 + Cxy + B_1 y^2, \quad z_2 = A_2 x^2 + Cxy + B_2 y^2,$$

und wir haben für den Abstand correspondirender Punkte beider Oberflächen $z_1 - z_2 = Ax^2 + By^2$, wo $A = A_1 - A_2$, $B = B_1 - B_2$ und alle A, B, C als verschwindend klein zu betrachten sind*). A und B haben nach der Bedeutung der Grösse $z_1 - z_2$ das gleiche Vorzeichen; wir wollen dasselbe als positiv annehmen. Dies fällt zusammen mit der Bestimmung, dass die positive z-Axe in das Innere desjenigen Körpers gehe, auf welchen sich der Index 1 bezieht.

Wir denken uns weiter in jedem der beiden Körper ein besonderes mit dem betreffenden Körper im Unendlichen starr verbundenes rechtwinklig-geradliniges Coordinatensystem, welches während der mathematischen Berührung der Oberfläche mit dem entsprechenden Theile des bisherigen Systems der xyz zusammenfällt. Bei einem auf die Körper ausgeübten Drucke werden sich diese Coordinatensysteme parallel der z-Axe gegen einander verschieben und zwar wird ihre Verschiebung gleich sein der Annäherung der von der Druckstelle unendlich entfernten Theile beider Körper. Es wird nicht nöthig sein, für diese Coordinatensysteme besondere Bezeichnungen einzuführen. Die Ebene $z = 0$ in jedem dieser Systeme ist der Oberfläche des betreffenden Körpers im Endlichen unendlich nahe und kann daher als die Oberfläche selbst angesehen werden, ebenso die Richtung der z-Axe als die Richtung der Normale zu dieser Oberfläche.

Es seien ξ, η, ζ die Verschiebungen nach x, y, z; mit Y_x werde die Druckcomponente in Richtung der y bezeichnet, welche in einem Flächenelemente, dessen Normale die x-Richtung hat, von dem Körpertheile, in dem x kleinere Werthe besitzt, auf denjenigen, in dem x grösser ist, ausgeübt wird, und die analoge Bezeichnung gelte für die übrigen Druckcomponenten; es seien endlich $K_1 \theta_1$ und $K_2 \theta_2$ die Elasticitätscoefficienten des einen und

---

*) Es seien ϱ_{11} und ϱ_{21} die beiden reciproken Hauptkrümmungsradien der Oberfläche des einen Körpers, positiv gerechnet, wenn die zugehörigen Krümmungsmittelpunkte im Innern dieses Körpers liegen, ebenso seien ϱ_{21} und ϱ_{22} die beiden Hauptkrümmungen der Oberfläche des andern Körpers, endlich sei ω der Winkel, welchen die Ebenen der Krümmungen ϱ_{21} und ϱ_{22} mit einander bilden. Dann ist

$$2(A+B) = \varrho_{11} + \varrho_{12} + \varrho_{21} + \varrho_{22},$$

$$2(A-B) = \sqrt{(\varrho_{11} - \varrho_{12})^2 + 2(\varrho_{11} - \varrho_{12})(\varrho_{21} - \varrho_{22})\cos 2\omega + (\varrho_{21} - \varrho_{22})^2}.$$

Führen wir einen Hülfswinkel τ ein durch die Gleichung $\cos\tau = \frac{A-B}{A+B}$, so ist

$$2A = (\varrho_{11} + \varrho_{12} + \varrho_{21} + \varrho_{22})\cos^2\frac{\tau}{2}, \quad 2B = (\varrho_{11} + \varrho_{12} + \varrho_{21} + \varrho_{22})\sin^2\frac{\tau}{2}.$$

des andern Körpers. Allgemein mögen die Grössen, welche sich auf den einen oder den andern der beiden Körper beziehen, durch die Indices 1 und 2 unterschieden werden; wo die Rechnungen sich gleichmässig auf beide beziehen, lassen wir die Indices fort. Wir haben nun folgende Bedingungen für das Gleichgewicht.

1) Im Innern jedes Körpers muss sein

$$0 = \Delta\xi + (1+2\theta)\frac{\partial\sigma}{\partial x}, \quad 0 = \Delta\eta + (1+2\theta)\frac{\partial\sigma}{\partial y}, \quad 0 = \Delta\zeta + (1+2\theta)\frac{\partial\sigma}{\partial z},$$

$$\sigma = \frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z},$$

und zwar ist in 1 für θ θ_1, in 2 für θ θ_2 zu setzen.

2) An den Grenzen müssen die folgenden Bedingungen erfüllt sein:

a) Im Unendlichen verschwinden ξ, η, ζ, da hier unsere Coordinatensysteme mit den Körpern starr verbunden sind;

b) für $z = 0$, das heisst für die Oberflächen der Körper, müssen die Tangentialkräfte, die senkrecht zur z-Axe sind, verschwinden, also:

$$Y_z = -K\left(\frac{\partial\eta}{\partial z} + \frac{\partial\zeta}{\partial y}\right) = 0, \quad X_z = -K\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial z}\right) = 0;$$

c) für $z = 0$ muss ferner ausserhalb eines gewissen Theils dieser Ebene, nämlich ausserhalb der Druckfläche, auch die Normalkraft verschwinden, also sein

$$Z_z = 2K\left(\frac{\partial\zeta}{\partial z} + \theta\sigma\right) = 0.$$

Innerhalb jenes Theils muss sein

$$Z_{z1} = Z_{z2}.$$

Die Vertheilung des Druckes in jenem Theil kennen wir nicht, dafür haben wir hier eine Bedingung für die Verschiebung ζ:

d) Bezeichnet nämlich α die Verschiebung gegen einander der beiden Coordinatensysteme, auf welche wir die Verrückungen beziehen, so ist der Abstand correspondirender Punkte beider Oberflächen nach der Deformation gleich $Ax^2 + By^2 + \zeta_1 - \zeta_2 - \alpha$, und da innerhalb der Druckfläche dieser Abstand verschwinden soll, muss obiger Ausdruck gleich Null sein, also sein:

$$\zeta_1 - \zeta_2 = \alpha - Ax^2 - By^2 = \alpha - z_1 + z_2.$$

e) Zu den aufgezählten Bedingungen treten dann noch die, dass im Innern der Druckfläche Z_z überall das positive Vorzeichen habe, so wie die, dass ausserhalb der Druckfläche $\zeta_1 - \zeta_2 > \alpha - Ax^2 - By^2$ sei, da sonst der eine Körper in den andern überquellen müsste.

f) Endlich muss das Integral $\int Z_z ds$, genommen über den von der Druckfigur begrenzten Theil der Oberfläche gleich dem gegebenen Gesammtdruck, den wir p nennen wollen, sein.

Die besondere Form der Oberfläche der beiden Körper kommt nur in der Grenzbestimmung 2) *d*) vor, abgesehen von dieser verhält sich jeder derselben wie ein unendlich grosser Körper, der den ganzen Raum auf einer Seite der Ebene $z = 0$ ausfüllt, während auf diese Ebene nur senkrechte Drucke wirken. Das Gleichgewicht eines solchen Körpers betrachten wir daher näher. Sei P eine Function, welche innerhalb des Körpers der Gleichung $\Delta P = 0$ genügt, im Besonderen wollen wir uns P vorstellen als Potential einer auf der Ebene $z = 0$ im Endlichen vertheilten Elektricitätsmenge. Sei ferner

$$\Pi = -\frac{zP}{K} + \frac{1}{K(1+2\theta)}\left\{\int_z^i P dz - J\right\};$$

wo i eine unendliche Grösse sein soll und J eine Constante, die so gewählt ist, dass Π endlich wird. Zu diesem Behufe wird J gleich sein müssen dem natürlichen Logarithmus von i, multiplicirt mit der Gesammtmenge freier Elektricität, die dem Potentiale P entspricht. Aus der Festsetzung für Π folgt:

$$\Delta\Pi = -\frac{2}{K}\frac{\partial P}{\partial z}.$$

Wir setzen nun, nach Einführung der Abkürzung

$$\frac{2(1+\theta)}{K(1+2\theta)} = \vartheta:$$

$$\xi = \frac{\partial \Pi}{\partial x}, \quad \eta = \frac{\partial \Pi}{\partial y}, \quad \zeta = \frac{\partial \Pi}{\partial z} + 2\vartheta P,$$

$$\sigma = \Delta\Pi + 2\vartheta\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{2}{K(1+2\theta)}\frac{\partial P}{\partial z}.$$

Man überzeugt sich leicht, dass das vorgelegte System von Verschiebungen den für ξ, η, ζ aufgestellten Differentialgleichungen genügt, und dass in der Unendlichkeit diese Verschiebungen verschwinden. Für die Componenten der Drucke erhalten wir:

$$X_x = -2K\left\{\frac{\partial^2\Pi}{\partial x^2} + \frac{2\theta}{K(1+2\theta)}\frac{\partial P}{\partial z}\right\}; \quad X_y = -2K\frac{\partial^2\Pi}{\partial x\partial y};$$

$$Y_y = -2K\left\{\frac{\partial^2\Pi}{\partial y^2} + \frac{2\theta}{K(1+2\theta)}\frac{\partial P}{\partial z}\right\}; \quad X_z = -2K\left\{\frac{\partial^2\Pi}{\partial x\partial z} + \vartheta\frac{\partial P}{\partial x}\right\} = 2z\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial z},$$

$$Z_z = -2K\left\{\frac{\partial^2\Pi}{\partial z^2} + \frac{2(2+3\theta)}{K(1+2\theta)}\frac{\partial P}{\partial z}\right\}; \quad Y_z = -2K\left\{\frac{\partial^2\Pi}{\partial y\partial z} + \vartheta\frac{\partial P}{\partial y}\right\} = 2z\frac{\partial^2 P}{\partial y\partial z}.$$

Aus den beiden letzten Formeln folgt, dass für das vorgelegte System in der Ebene $z=0$ die zur z-Axe senkrechten Tangentialkräfte verschwinden. Wir bestimmen noch die Verschiebung ζ und den Normaldruck Z_z für die Ebene $z=0$; wir finden

$$\zeta = \vartheta P, \quad Z_z = -2\frac{\partial P}{\partial z}.$$

Die Dichtigkeit der Elektricität, welche zum Potentiale P gehört, ist gleich $-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial P}{\partial z}$; wir erhalten daher den Satz: Die Verschiebung ζ in der Oberfläche, welche dem Normaldruck Z_z entspricht, ist gleich dem $\frac{\vartheta}{4\pi}$fachen des Potentials, welches zu einer dem Druck Z_z numerisch gleichen elektrischen Dichtigkeit gehört.

Indem wir nun die Betrachtung der *beiden* Körper wieder aufnehmen, denken wir uns die Elektricität, deren Potential P ist, nur in einem begrenzten Theil der Ebene $z=0$ verbreitet, setzen Π_1 und Π_2 den Ausdrücken gleich, die aus dem für Π gegebenen Ausdruck entstehen, wenn den Zeichen K und θ der Index 1 oder 2 gegeben wird, und machen:

$$\xi_1 = \frac{\partial \Pi_1}{\partial x}, \quad \eta_1 = \frac{\partial \Pi_1}{\partial y}, \quad \zeta_1 = \frac{\partial \Pi_1}{\partial z} + 2\vartheta_1 P,$$

$$\xi_2 = -\frac{\partial \Pi_2}{\partial x}, \quad \eta_2 = -\frac{\partial \Pi_2}{\partial y}, \quad \zeta_2 = -\frac{\partial \Pi_2}{\partial z} - 2\vartheta_2 P,$$

woraus für $z=0$ folgt:

$$\zeta_1 = \vartheta_1 P, \quad \zeta_2 = \vartheta_2 P, \quad Z_{z1} = -2\frac{\partial P}{\partial z}, \quad Z_{z2} = 2\frac{\partial P}{\partial z}.$$

Bei dieser Annahme wird den gemachten Auseinandersetzungen zufolge den Bedingungen 1), 2) *a*) und 2) *b*) genügt. Da $\frac{\partial P}{\partial z}$ auf beiden Seiten der Ebene $z=0$ entgegengesetzte Werthe hat und verschwindet ausserhalb der elektrischen Fläche, deren Potential P ist, so sind durch den gemachten Ansatz auch die Bedingungen 2) *c*) erfüllt, falls die Druckfläche die mit Elektricität belegte Fläche ist. Daraus, dass P an der Fläche $z=0$ stetig ist, folgt ferner für diesen Werth von z: $\vartheta_2\zeta_1 + \vartheta_1\zeta_2 = 0$. Nach der Bedingung 2) *d*) aber haben wir für die Druckfläche: $\zeta_1 - \zeta_2 = \alpha - z_1 + z_2$, also wird hier:

$$\zeta_1 = \frac{\vartheta_1}{\vartheta_1+\vartheta_2}(\alpha - z_1 + z_2), \quad \zeta_2 = -\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1+\vartheta_2}(\alpha - z_1 + z_2).$$

Die Gleichung der Druckfläche ist, wenn wir von einer Constanten, die von der Wahl des Coordinatensystems abhängt und daher bedeutungslos ist, absehen, $z = z_1 + \zeta_1 = z_2 + \zeta_2$, also entwickelt $(\vartheta_1 + \vartheta_2)z = \vartheta_2 z_1 + \vartheta_1 z_2$. Hiernach ist die Druckfläche Theil einer Fläche zweiten Grades, die zwischen den sich berührenden Flächen in deren undeformirtem Zustande liegt, sie ist ähnlicher der Begrenzung desjenigen Körpers, dessen Elasticitätscoefficient grösser ist; sind beide Körper von demselben Material, so ist sie geradezu die Mittelfläche zwischen deren Oberflächen, da dann $2z = z_1 + z_2$ wird.

Wir machen jetzt eine bestimmte Annahme über die Anordnung der Elektricität, deren Potential P ist. Sie sei verbreitet auf einer Ellipse, deren Halbaxen a und b in die Richtung der Axen der x und y fallen, mit einer Dichtigkeit, die gleich

$$\frac{3p}{8\pi^2 ab}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$$

ist, das heisst so, dass sie aufgefasst werden kann als eine Masse, die mit gleicher räumlicher Dichtigkeit ein unendlich abgeplattetes Ellipsoid erfüllt. Es ist dann

$$P = \frac{3p}{16\pi}\int_u^\infty \frac{1-\frac{x^2}{a^2+\lambda}-\frac{y^2}{b^2+\lambda}-\frac{z^2}{\lambda}}{\sqrt{a^2+\lambda . b^2+\lambda . \lambda}}\, d\lambda,$$

wo die untere Integralgrenze u die positive Wurzel der kubischen Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2+u}+\frac{y^2}{b^2+u}+\frac{z^2}{u} = 1$$

bezeichnet. Für das Innere der Druckfläche, welche durch die genannte Ellipse begrenzt wird, ist $u = 0$, also $P = L - Mx^2 - Ny^2$, wo L, M, N gewisse bestimmte positive Integrale bedeuten. Die Bedingung 2) *d*) ist demnach erfüllt, wenn wir a und b so bestimmen, dass

$$(\vartheta_1+\vartheta_2)M = A, \quad (\vartheta_1+\vartheta_2)N = B$$

wird, was immer möglich ist. Die in der Bedingung vorkommende Unbekannte α bestimmt sich dann durch die Gleichung

$$(\vartheta_1+\vartheta_2)L = \alpha.$$

Dass die erste der Bedingungen 2) *e*) erfüllt ist, folgt unmittelbar aus der Gleichung

$$Z_z = \frac{3p}{2\pi ab}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}.$$

Um zu zeigen, dass es auch die zweite ist, ist zu beweisen, dass für $z = 0$ und $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} > 1$, $(\vartheta_1+\vartheta_2)P > \alpha - Ax^2 - By^2$ ist. Zu diesem Zwecke beachte man, dass hier:

$$P = L - Mx^2 - Ny^2 - \frac{3p}{16\pi}\int_0^u \frac{1 - \frac{x^2}{a^2+\lambda} - \frac{y^2}{b^2+\lambda}}{\sqrt{a^2+\lambda \, . \, b^2+\lambda \, . \, \lambda}}\, d\lambda$$

und daher, da der Zähler des unter dem Integralzeichen stehenden Ausdrucks im betrachteten Gebiete negativ ist, $P > L - Mx^2 - Ny^2$. Durch Multiplication dieser Gleichung mit $\vartheta_1 + \vartheta_2$ folgt die, welche wir zu beweisen suchten. Dass endlich auch die letzte Bedingung 2) f) erfüllt ist, ergiebt eine einfache Integration, und wir besitzen daher in der angenommenen Form von P und dem zugehörigen System der $\xi\eta\zeta$ eine allen Bedingungen genügende Lösung.

Die Gleichungen für die Axen der Druckellipse werden, explicite geschrieben:

$$\int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{(a^2+u)^3(b^2+u)u}} = \frac{A}{\vartheta_1+\vartheta_2}\frac{16\pi}{3p}, \quad \int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{(a^2+u)(b^2+u)^3 u}} = \frac{B}{\vartheta_1+\vartheta_2}\frac{16\pi}{3p};$$

oder, nach Einführung des Verhältnisses $a : b = k$ und einer einfachen Umformung:

$$\frac{1}{a^3}\int_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{(1+k^2z^2)^3(1+z^2)}} = \frac{8\pi}{3p}\frac{A}{\vartheta_1+\vartheta_2}, \quad \frac{1}{a^3}\int_0^\infty \frac{dz}{k^2\sqrt{(1+k^2z^2)(1+z^2)^3}} = \frac{8\pi}{3p}\frac{B}{\vartheta_1+\vartheta_2}.$$

Durch Division wird eine transcendente Gleichung für das Verhältniss k erhalten *). Dasselbe hängt nur ab von dem Verhältniss $A : B$, und man

*) Die Auflösung dieser Gleichung und die Auswerthung der zur Bestimmung von a und b nothwendigen Integrale kann mit Hülfe der *Legendre*schen Tafeln ausgeführt werden, ohne dass neue Quadraturen nöthig würden. Die immerhin weitläufige Rechnung wird für die meisten Fälle überflüssig gemacht durch die folgende kleine Tabelle, deren Einrichtung diese ist. Drückt man die Grössen A und B in den Gleichungen für a und b durch die Hauptkrümmungen und den in einer früheren Anmerkung eingeführten Hülfswinkel τ aus, so lassen sich die Auflösungen dieser Gleichungen in der Form darstellen:

$$a = \mu\sqrt[3]{\frac{3p(\vartheta_1+\vartheta_2)}{8(\varrho_{11}+\varrho_{12}+\varrho_{21}+\varrho_{22})}}, \quad b = \nu\sqrt[3]{\frac{3p(\vartheta_1+\vartheta_2)}{8(\varrho_{11}+\varrho_{12}+\varrho_{21}+\varrho_{22})}},$$

wo μ und ν transcendente Functionen des Winkels τ sind. Die Tabelle giebt nun die Werthe dieser Functionen für zehn Werthe des in Winkelgraden angegebenen Argumentes τ.

τ	90	80	70	60	50	40	30	20	10	0
μ	1,0000	1,1278	1,2835	1,4858	1,7542	2,1357	2,7307	3,7779	6,6120	infinitum
ν	1,0000	0,8927	0,8017	0,7171	0,6407	0,5673	0,4930	0,4079	0,3186	0,0000

erkennt leicht aus der Bedeutung, welche wir den Kräften und Verschiebungen untergelegt haben, dass die Druckellipse immer länglicher ist, als die Ellipsen, in welchen der Abstand der beiden Körper constant ist. Für die absolute Grösse der Druckfläche folgt, dass dieselbe bei gegebener Form der Oberflächen proportional ist der dritten Wurzel aus dem Druck, sowie der dritten Wurzel aus der Grösse $\vartheta_1+\vartheta_2$. Für die Annäherung der Körper durch den Druck haben wir nach dem Vorigen:

$$\alpha = \frac{3p}{8\pi}\frac{\vartheta_1+\vartheta_2}{a}\int_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{(1+k^2z^2)(1+z^2)}}.$$

Führen wir die Multiplication mit der Summe $\vartheta_1+\vartheta_2$ aus, so zerfällt α in zwei Summanden, die eine besondere Bedeutung haben; es sind die Annäherungen des Nullpunktes an die unendlich entfernten Theile des einen und des anderen Körpers; wir können sie bezeichnen als die Einsenkungen, die der eine und der andere Körper erlitten hat. Bei gleicher Gestalt der sich berührenden Oberflächen ist die Annäherung proportional der $\frac{2}{3}$ten Potenz des Drucks und der gleichen Potenz der Grösse $\vartheta_1+\vartheta_2$. Aendern A und B unter Beibehaltung ihres Verhältnisses ihren absoluten Werth, so ändern sich die Dimensionen der Druckfläche umgekehrt wie die dritten Wurzeln aus diesem Werth, die Annäherung direct wie diese Wurzeln. Werden A und B unendlich, so wird auch die Annäherung unendlich. Körper, welche sich mit scharfen Spitzen berühren, dringen in einander ein.

Hieran anknüpfend wollen wir die Beanspruchung desjenigen Elementes bestimmen, welches sich im Anfangspunkte unseres Coordinatensystems befindet, indem wir die drei Ausdehnungen $\frac{\partial\xi}{\partial x}$, $\frac{\partial\eta}{\partial y}$, $\frac{\partial\zeta}{\partial z}$ suchen. Wir haben zunächst für den Nullpunkt:

$$\sigma = \frac{2}{K(1+2\theta)}\frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{3p}{2K(1+2\theta)\pi}\frac{1}{ab},$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial z} = \frac{1}{K(1+2\theta)}\frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{3p}{4K(1+2\theta)\pi}\frac{1}{ab}.$$

Weiter haben wir für die Ebene $z=0$:

$$\xi = \frac{\partial\Pi}{\partial x}, \quad \eta = \frac{\partial\Pi}{\partial y}, \quad \Pi = \frac{1}{K(1+2\theta)}\int_0^\infty P\,dz = \frac{1}{2K(1+2\theta)}\int_{-\infty}^{\infty} P\,dz.$$

Man erkennt, dass in der gedachten Ebene ξ und η proportional sind den Kräften, welche ein unendlicher elliptischer Cylinder ausübt, der auf der Druckfläche steht und dessen Dichtigkeit nach innen zunimmt nach demselben Gesetz, nach welchem der Druck in der Druckfläche zunimmt. Im Allgemeinen sind also ξ und η durch verwickelte Functionen gegeben; für die Punkte, welche der Axe nahe liegen, lassen sie sich indessen leicht berechnen. Wir schneiden um die Axe einen sehr dünnen Cylinder heraus, dessen Mantelfläche der Mantelfläche des ganzen ähnlich ist; diesen Cylinder können wir als homogen betrachten, und da der äussere Theil auf die Punkte im Innern keine Anziehung ausübt, so müssen die Componenten der in Rede stehenden Kräfte, und also auch ξ und η für die verschiedenen Punkte gleich sein einer Constanten, multiplicirt mit respective $\frac{x}{a}$ und $\frac{y}{b}$. Daraus folgt $a\frac{\partial \xi}{\partial x} - b\frac{\partial \eta}{\partial y} = 0$. Andererseits haben wir

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} = \sigma - \frac{\partial \zeta}{\partial z} = -\frac{3p}{4K(1+2\theta)\pi}\frac{1}{ab}.$$

Hieraus finden wir nun für die drei Grössen, die wir suchten,

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{3p}{4K(1+2\theta)\pi}\frac{1}{a(a+b)},$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = -\frac{3p}{4K(1+2\theta)\pi}\frac{1}{b(a+b)},$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial z} = -\frac{3p}{4K(1+2\theta)\pi}\frac{1}{ab}.$$

Das negative Vorzeichen dieser drei Grössen zeigt an, dass das in Frage stehende Element in allen drei Richtungen comprimirt wird. Die Compressionen sind der dritten Wurzel aus dem Gesammtdruck proportional. Aus ihnen sind leicht die Drucke im Anfangspunkte zu bestimmen. Diese Drucke sind die grössten, welche überhaupt in den gepressten Körpern vorkommen; man kann daher behaupten, dass ein Ueberschreiten der Elasticitätsgrenze nicht eher statthaben wird, als bis diese Drucke von der Ordnung derjenigen werden, welche ein solches Ueberschreiten veranlassen können. In plastischen Körpern, z. B. in den weichen Metallen, wird dies Ueberschreiten zunächst in einer seitlichen Ausweichung, verbunden mit dauernder Compression bestehen, dasselbe wird daher auch nicht eine ins Unendliche wachsende Störung des Gleichgewichts zur Folge haben, sondern die Druckfläche wird sich so lange über das berechnete Maass hinaus vergrössern, bis der Druck auf die Flächeneinheit hinreichend klein geworden ist, um ertragen zu werden. Schwieriger ist es, die Erscheinung in spröden Körpern, wie hartem Stahl, Glas, Krystallen zu bestimmen, in welchen eine

Ueberschreitung der Elasticitätsgrenze nur als Entstehung eines Risses oder Sprunges, also nur unter dem Einfluss von Zugkräften auftritt. Von dem oben betrachteten Element, als von einem allseitig comprimirten kann ein solcher Sprung nicht ausgehen, und es ist bei unserer heutigen Kenntniss von der Festigkeit spröder Körper überhaupt nicht möglich, genau dasjenige Element zu bestimmen, in welchem die Bedingungen für das Zustandekommen eines Sprunges bei wachsendem Druck zuerst auftreten. Indessen zeigt eine eingehendere Discussion so viel, dass in Körpern, welche in ihrem elastischen Verhalten dem Glase oder harten Stahle ähnlich sind, bei weitem die stärksten Zugkräfte in der Oberfläche und zwar am Rande der Druckfigur auftreten. Es wird durch eine solche Discussion wahrscheinlich, dass der erste Sprung an den Enden der kleinen Axe der Druckellipse entsteht und senkrecht zu dieser Axe am Rande der Druckellipse entlang läuft.

Die gefundenen Formeln werden besonders einfach für den Fall, dass beide sich berührenden Körper Kugeln sind. In diesem Fall gehört auch die Druckfläche einer Kugel an. Ist ϱ der reciproke Radius der letzteren und sind ϱ_1 und ϱ_2 die reciproken Radien der sich berührenden Kugeln, so besteht die Beziehung $(\vartheta_1+\vartheta_2)\varrho = \vartheta_2\varrho_1+\vartheta_1\varrho_2$, welche für Kugeln aus gleichem Material in die einfachere $2\varrho = \varrho_1+\varrho_2$ übergeht. Die Druckfigur ist ein Kreis, dessen Radius wir a nennen wollen. Setzen wir

$$x^2+y^2=r^2, \quad \frac{r^2}{a^2+u}+\frac{z^2}{u}=1,$$

so wird

$$P = \frac{3p}{16\pi}\int_u^\infty \frac{1-\frac{r^2}{a^2+u}-\frac{z^2}{u}}{(a^2+u)\sqrt{u}}\,du,$$

welches Integral sich auch in geschlossener Form darstellen lässt.

Man findet nun leicht für den Radius des Druckkreises a und für die Annäherung α der Kugeln sowie für die Verschiebung ζ in der Fläche $z=0$, innerhalb des Druckkreises:

$$a = \sqrt[3]{\frac{3p(\vartheta_1+\vartheta_2)}{16(\varrho_1+\varrho_2)}}, \quad \alpha = \frac{3p(\vartheta_1+\vartheta_2)}{16a}, \quad \zeta = \frac{3p}{32}\,\vartheta\,\frac{2a^2-r^2}{a^3}.$$

Ausserhalb des Druckkreises wird ζ durch eine etwas verwickeltere, einen arctg enthaltende Function dargestellt. Sehr einfache Ausdrücke ergeben sich für ξ und η in der Fläche $z=0$. Für die Verdichtung in der Fläche $z=0$ findet man $\sigma = -\frac{3p}{2K(1+2\theta)\pi}\frac{\sqrt{a^2-r^2}}{a^3}$ innerhalb des Druckkreises, ausserhalb desselben ist $\sigma = 0$. Für den Druck Z_z innerhalb des Druckkreises wird erhalten

$$Z_z = \frac{3p}{2\pi}\frac{\sqrt{a^2-r^2}}{a^3}.$$

Im Mittelpunkte hat man

$$Z_z = \frac{3p}{2\pi a^2}, \quad X_x = Y_y = \frac{1+4\theta}{4(1+2\theta)}\frac{3p}{\pi a^2}.$$

Die erlangten Formeln lassen sich ohne Weiteres auf besondere Fälle anwenden. Für θ kann man in den meisten Körpern mit hinreichender Annäherung 1 setzen. K wird dann gleich $\frac{3}{8}$ des Elasticitätsmoduls, ϑ wird gleich $\frac{32}{9}$ des reciproken Werthes des Elasticitätsmoduls; in allen Körpern liegt ϑ zwischen dem Dreifachen und dem Vierfachen dieses reciproken Werthes. Presst man beispielshalber eine Glaslinse von 100 Meter Radius durch das Gewicht eines Kilogrammes gegen eine ebene Glasplatte (unter welchen Umständen der Radius des ersten *Newton*schen Ringes gleich ca. 5,2 Millimetern wird), so erhält man eine Druckfläche, die einer Kugel von 200 Meter Radius angehört, der Radius des Druckkreises ist 2,67$^{\text{mm}}$, die Annäherung der beiden Glaskörper beträgt nur 71 Milliontel Millimeter, der Druck Z_z in der Mitte der Druckfläche ist gleich 0,0669 Kilogramm pro Quadratmillimeter, die dazu senkrechten Drucke X_x und Y_y betragen ca. $\frac{5}{6}$ obigen Werths. Denken wir uns als zweites Beispiel eine Reihe von Stahlkugeln vom Radius R durch ihre eigene Schwere gegen eine horizontale starre Platte gepresst, so findet man sehr nahezu, in Millimetern gerechnet, den Radius des Druckkreises $a = \frac{1}{1000}\sqrt[3]{R^4}$; also für eine Kugel vom Radius

	1^{mm},	1^{m},	1^{km},	1000^{km},
wird	$a =$ ca. $\frac{1}{1000}{}^{\text{mm}}$,	10^{mm},	100^{m},	1000^{km},
oder	$a = \frac{1}{1000}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{1}$

des Radius. Bei Kugeln, deren Radius grösser als 1^{km} ist, beträgt der Radius des Druckkreises schon mehr als $\frac{1}{10}$ des Radius der Kugel. Auf solche Verhältnisse finden unsere Rechnungen keine Anwendung, da wir eben dies Verhältniss als einen kleinen Bruch voraussetzten. Aber eben dass in Kugeln von dieser Grösse bei kleinen Deformationen ein Gleichgewicht nicht mehr möglich ist, zeigt, dass ein solches überhaupt nicht zu Stande kommen kann. Denken wir uns als ein anderes Beispiel zwei Stahlkugeln von gleichem

Radius R an einander gelegt und nur durch die gegenseitige Gravitation an einander gepresst. Es ergiebt sich hier der Radius des Druckkreises $\varrho = 0{,}000000378\sqrt[3]{R^5}$, wenn in Millimetern gerechnet wird*). Ist der Radius der beiden Kugeln gleich 4,3 Kilometern, so wird $\varrho = \frac{1}{100}R$, ist er gleich 136 Kilometern, so wird $\varrho = \frac{1}{10}R$. Zwischen beiden Werthen und näher dem letzteren wird derjenige Werth von R liegen, für welchen die Elasticitätskräfte aufhören, der Gravitation das Gleichgewicht zu halten. Werden Stahlkugeln von grösserem Radius an einander gelegt, so werden sie zerbrechen, und zwar in Theile, deren Dimensionen von der Ordnung der eben für R angegebenen Werthe sind.

Zum Schluss wollen wir von den erlangten Formeln eine Anwendung machen auf den *Stoss* elastischer Körper. Sowohl aus schon vorhandenen Beobachtungen, als auch aus den Resultaten der gleich anzustellenden Betrachtungen folgt, dass die Stosszeit, d. h. die Zeit, während welcher die stossenden Körper in Berührung sind, wenn auch absolut sehr klein, doch sehr gross ist im Verhältniss zu derjenigen Zeit, welche elastische Wellen nöthig haben, um in den in Rede stehenden Körpern Längen von der Ordnung desjenigen Theils der Oberflächen zu durchlaufen, welcher beiden Körpern in ihrer grössten Annäherung gemeinsam ist, und welchen wir die Stossfläche nennen wollen. Daraus folgt, dass der elastische Zustand beider Körper in der Nähe des Stosspunktes während des ganzen Verlaufs des Stosses sehr nahezu gleich ist dem Gleichgewichtszustand, den der zwischen beiden Körpern in jedem Augenblick vorhandene Gesammtdruck bei längerer Dauer hervorbringen würde. Bestimmen wir daher den zwischen beiden Körpern herrschenden Druck aus der Beziehung, welche wir zwischen diesem Druck und der Annäherung in Richtung der gemeinsamen Normale früher für ruhende Körper aufgestellt haben, und wenden im Uebrigen auf das Innere jedes der beiden Körper die Differentialgleichungen für bewegte elastische Körper an, so werden wir den Verlauf des Vorgangs mit grosser Annäherung erhalten. Zu allgemeinen Sätzen können wir auf diese Weise naturgemäss nicht kommen, wir erhalten aber eine Reihe solcher, wenn wir jetzt die weitere Voraussetzung machen, dass die Stosszeit gross sei auch gegen diejenige Zeit, welche die elastischen Wellen nöthig haben, um die

*) In diesen Rechnungen ist der Elasticitätsmodul des Stahles zu $20000 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{mm}^2}$, die Dichtigkeit des Stahls zu 7,7, die mittlere der Erde zu 6 angenommen.

ganzen Dimensionen der stossenden Körper zu durchlaufen. Ist diese Bedingung erfüllt, so bewegen sich alle Theile der stossenden Körper, mit Ausnahme derjenigen, welche dem Stosspunkt unendlich nahe liegen, wie die Theile starrer Körper; dass die fragliche Bedingung in wirklichen Körpern erfüllt sein kann, werden wir aus unseren Resultaten nachweisen.

Wir behalten unsere Coordinatensysteme der xyz bei. Sei α die Componente in Richtung der z der Entfernung zweier Punkte des einen und des andern Körpers, zweier Punkte, die so gewählt sind, dass ihre Entfernung von der Stossfläche klein ist gegen die Dimensionen der ganzen Körper, gross gegen die Dimensionen der Stossfläche; sei ferner α' die Ableitung von α nach der Zeit. Ist nun dJ diejenige Bewegungsgrösse, welche während des Zeitelements dt der eine Körper verliert, der andere gewinnt, so ist, wie die Theorie des Stosses starrer Körper zeigt: $d\alpha' = -k_1 dJ$, wo k_1 eine Grösse ist, die nur von den Massen der stossenden Körper, ihren Hauptträgheitsmomenten und der Lage der Hauptträgheitsaxen zur Stossnormale abhängt*). Andererseits ist dJ gleich dem Zeitelement dt, multiplicirt mit dem während desselben zwischen den Körpern thätigen Druck. Dieser ist aber gleich $k_2 \alpha^{\frac{3}{2}}$, wo k_2 eine aus dem Vorigen zu bestimmende Constante ist, die nur von der Form der Oberflächen und den Elasticitätsverhältnissen in unmittelbarer Nähe des Stosspunktes abhängt. Sonach ist $dJ = k_2 \alpha^{\frac{3}{2}} dt$ und $d\alpha' = -k_1 k_2 \alpha^{\frac{3}{2}} dt$, oder wenn wir integriren, und mit α'_0 den Werth von α' unmittelbar vor dem Stosse bezeichnen:

$$\alpha'^2 - \alpha_0'^2 + \tfrac{4}{5} k_1 k_2 \alpha^{\frac{5}{2}} = 0,$$

welche Gleichung nichts anderes ist, als die der Erhaltung der Energie. Für die grösste Annäherung der Körper ist $\alpha' = 0$; setzen wir den entsprechenden Werth von α gleich α_m, so ist $\alpha_m = \left(\frac{5\alpha_0'^2}{4k_1 k_2}\right)^{\frac{2}{5}}$, der zwischen den Körpern gleichzeitig auftretende Maximaldruck ist $p_m = k_2 \alpha_m^{\frac{3}{2}}$; daraus ergeben sich ohne Weiteres die Dimensionen der Stossfläche.

---

*) Siehe *Poisson*, Traité de mécanique, II, Chap. 7. In der dort benutzten Bezeichnungsweise ist die Constante k_1

$$k_1 = \frac{1}{M} + \frac{(b\cos\gamma - c\cos\beta)^2}{A} + \frac{(c\cos\alpha - a\cos\gamma)^2}{B} + \frac{(a\cos\beta - b\cos\alpha)^2}{C}$$
$$+ \frac{1}{M'} + \frac{(b'\cos\gamma' - c'\cos\beta')^2}{A'} + \frac{(c'\cos\alpha' - a'\cos\gamma')^2}{B'} + \frac{(a'\cos\beta' - b'\cos\alpha')^2}{C'}.$$

Um die Abhängigkeit des Vorgangs von der Zeit zu gewinnen, integriren wir nochmals und erhalten

$$t = \int_{\alpha}^{\alpha_m} \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha_0'^2 - \frac{4}{5}k_1 k_2 \alpha^{\frac{5}{2}}}}.$$

Die obere Grenze ist so gewählt, dass $t = 0$ wird für den Augenblick der grössten Annäherung. Für jeden Werth der unteren Grenze α erhält man durch das doppelte Vorzeichen der Wurzel zwei gleiche positive und negative Werthe von t. Es ist sonach α eine gerade, α' eine ungerade Function von t; unmittelbar nach dem Stosse entfernen sich die Stosspunkte in Richtung der Normalen mit derselben relativen Geschwindigkeit, mit welcher sie sich vor dem Stosse einander näherten. Nach derselben transcendenten Function, nach welcher α' von seinem Anfangs- auf seinen Endwerth übergeht, gehen alle übrigen Geschwindigkeitscomponenten von ihren Anfangswerthen auf ihre Endwerthe über.

Die beiden Körper berühren sich zunächst für $\alpha = 0$, sie verlassen sich, wenn α wieder gleich 0 ist; sonach ist die Dauer der Berührung oder die Stosszeit

$$T = 2\int_{0}^{\alpha_m} \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha_0'^2 - \frac{4}{5}k_1 k_2 \alpha^{\frac{5}{2}}}} = 2\eta \sqrt[5]{\frac{25}{16\alpha_0' k_1^2 k_2^2}} = 2\eta \frac{\alpha_m}{\alpha_0'},$$

wenn

$$\eta = \int_0^1 \frac{d\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^{\frac{5}{2}}}} = 1{,}4716$$

ist. Die Stosszeit kann demnach auf verschiedene Weise unendlich werden, ohne dass diejenige Zeit, mit welcher verglichen sie gross sein soll, gleichfalls unendlich würde. Insbesondere wird die Stosszeit unendlich, wenn die anfängliche relative Geschwindigkeit der stossenden Körper unendlich klein ist; welches also auch im Uebrigen die Verhältnisse eines gegebenen Stosses sind, für hinreichend klein gewählte Geschwindigkeiten werden die gegebenen Entwickelungen jede gewünschte Genauigkeit besitzen. Allemal wird diese Genauigkeit gleich sein derjenigen, welche den sogenannten Gesetzen des Stosses vollkommen elastischer Körper für den gegebenen Fall innewohnt. Für den centralen Stoss zweier Kugeln von gleichem Radius R und gleichem Material von der Dichte q werden die Constanten k_1 und k_2:

$$k_1 = \frac{3}{2R^3\pi q}, \quad k_2 = \frac{8}{3\vartheta}\sqrt{\frac{R}{2}},$$

speciell für den Stoss zweier gleichen Stahlkugeln vom Radius R wird daher, wenn als Einheit der Länge das Millimeter und als Einheit der Kraft das Gewicht eines Kilogramms benutzt wird:

$$\log k_1 = 8{,}78 - 3 \log R,$$
$$\log k_2 = 4{,}03 + \tfrac{1}{2} \log R.$$

Daraus ergiebt sich dann für zwei solcher Kugeln, die mit einer relativen Geschwindigkeit v zusammenstossen:

der Radius der Stossfläche . . . . $a_m = 0{,}0020 R v^{\frac{2}{5}} \,\mathrm{mm}$,

die Stosszeit . . . . $T = 0{,}000024 R v^{-\frac{1}{5}} \,\mathrm{sec}$,

der Gesammtdruck im Augenblick der grössten Annäherung . . . . $p_m = 0{,}00025 R^2 v^{\frac{6}{5}} \,\mathrm{kg}$,

der gleichzeitig im Stossmittelpunkt herrschende Maximaldruck pro Flächeneinheit . . . . $p'_m = 29{,}1 v^{\frac{2}{5}} \,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{mm}^2}$.

Beträgt beispielsweise der Radius der Kugeln 25^{mm}, die Geschwindigkeit $10 \frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{sec}}$ so wird $a_m = 0{,}13^{\mathrm{mm}}$, $T = 0{,}00038^{\mathrm{sec}}$, $p_m = 2{,}47^{\mathrm{kg}}$, $p'_m = 73{,}0 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{mm}^2}$. Für zwei Stahlkugeln von der Grösse der Erde, die mit einer Anfangsgeschwindigkeit von $10 \frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{sec}}$ zusammenträfen, würde die Dauer der Berührung nahe an 27 Stunden betragen.

Berlin, Januar 1881.