

B Geschichte der Theorie des elastischen Stoßes

Zum Beginnen, zum Vollenden
Zirkel, Bley und Winkelwage,
alles stockt und starrt in Händen,
leuchtet nicht der Stern dem Tage.
GOETHE

1 Einleitende Bemerkungen

Nach EULERS Publikationen⁶⁵ vergingen etwa 75 Jahre, bis man wieder begann, über den Stoßvorgang neue, theoretische Erkenntnisse zu gewinnen. Alle diese Theorien können als Fortsetzungen (im vertiefenden Sinne) entweder der mechanischen Theorie von WALLIS, WREN, HUYGENS und NEWTON, oder der elastischen Theorie von EULER angesehen werden. Die letztere wird, da sie elastische Wellen erschließt, auch die Wellentheorie des Stoßes genannt. Das Kriterium der Trennung dieser Stoßtheorien ist durch das Verhältnis der Laufzeit der elastischen Wellen in den stoßenden Körpern zu der Zeit des Stoßablaufes gegeben. Ist es klein, was bei kleinen Stoßgeschwindigkeiten zutrifft, so kann man mit der mechanischen Theorie arbeiten. Einen entscheidenden Impuls erhielt diese Theorie durch HEINRICH HERTZ; wir kommen auf seine diesbezügliche Arbeit noch zurück. Ist das erwähnte Zeitverhältnis dagegen groß, so werden die elastischen Wellen (Schwingungen) einen beträchtlichen Teil der von den stoßenden Körpern mitgebrachten kinetischen Energie verzehren, so daß die elastischen Wellen quasi als Störungen des eigentlichen Stoßvorganges anzusehen sind. Zur Wellentheorie des Stoßes lieferten FRANZ NEUMANN und BARRÉ DE SAINT-VENANT die ersten richtungsweisenden Beiträge. Im Anschluß an diese Theorien begannen auch deren experimentelle Nachprüfungen, von denen erst diejenige von CARL RAMSAUER (1879–1955) als klärend und wirklich erfolgreich bezeichnet werden kann.

2 Die Stoßtheorie von Poisson

DENIS POISSON (Bild 196) widmete der Stoßtheorie in seinem *Traité de mécanique* (Paris 1835) umfangreiche Ausführungen. Sie befinden sich im zweiten Band der von M. A. STERN besorgten deutschen Übersetzung (1835/36), und zwar auf den Seiten 20–27 (1. Kapitel), 197–226 (7. Kapitel) und 257–271 (8. Kapitel). Der an der ersten Stelle angegebene Teil enthält die auf dem Impuls- und Energiesatz basierende Theorie von WALLIS, WREN und HUYGENS. Insbesondere weist POISSON darauf hin, daß der Impulsatz wegen der allein in Betracht kommenden inneren Stoßkräfte die Erhaltung des Systemschwerpunktes beinhaltet.

Die Ausführungen im 7. Kapitel (S. 197–226) befassen sich mit dem *Stoß der Körper beliebiger Gestalt*. Aus dem mit dem d'Alembertschen Prinzip hergeleiteten Impuls-

⁶⁵ Fußnoten 44 und 45.



Bild 196
DENIS POISSON (1781–1840).

und Drehmomentensatz gewinnt POISSON die nötige Anzahl von linearen Gleichungen, um aus je drei Translations- und Winkelgeschwindigkeitskomponenten der einzelnen Körper vor dem Stoß die gleichen Geschwindigkeitskomponenten nach dem Stoß zu bestimmen. Diese Gleichungen werden für zwei stoßende Körper explizit hingeschrieben. In diesem Falle sind es also zwölf lineare Gleichungen, die aber neben den zwölf unbekanntem Geschwindigkeitskomponenten als dreizehnte Unbekannte noch die an der Stoßstelle auftretende Normalkraft enthalten. Diese wird erst durch die Fallunterscheidung «vollkommen unelastischer Stoß» oder «vollkommen elastischer Stoß» bestimmbar⁶⁶.

POISSON macht auch einen Vorschlag, wie man, mit Hilfe eines experimentell zu ermittelnden Faktors für die Normalkraft das zwischen den beiden Idealfällen liegende elastische Gebiet auch noch erfassen könnte (S. 204–205). Er rechnet auch einige interessante Spezialfälle für beliebige und – mit Rücksicht auf das Billardspiel – kugelförmige Körper durch⁶⁷. Auch der Fall wird untersucht, in dem der eine Körper in einem Punkt festgehalten wird (S. 221–222).

Im 8. Kapitel behandelt POISSON die longitudinalen Schwingungen eines homogenen, elastischen Stabes konstanten Querschnittes (S. 245–257). Er kommt (mit der Dichte ρ und dem Elastizitätsmodul E) zu der bekannten Differentialgleichung der eindimensionalen Wellenfortpflanzung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (14)$$

Hierbei bedeutet u die longitudinale Verschiebung der Stabquerschnitte, t die Zeit und x die in der Richtung der Stabachse gemessene Koordinate. Diese Differentialgleichung bzw. ihre in Form von trigonometrischen Reihen angegebenen Lösungen verwendet POISSON für den longitudinalen Stoß zweier bis auf ihre Längen gleicher Stäbe. Hierbei nimmt er an, daß vom Augenblick des Zusammenstoßes die beiden Stäbe Teile eines einzigen elastischen Körpers sind. Daß diese Hypothese nicht zutreffend sein kann, zeigt sich zum Beispiel dadurch, daß die beiden Stäbe, außer wenn sie gleich lang sind, sich niemals trennen würden, und das widerspricht der Erfahrung. Damit ist dieser erste Versuch einer Wellentheorie des Stoßes mißlungen.

3 Mechanische Näherungstheorien

Um die Mitte des 19. Jahrhunderts begann die Blütezeit des Eisenbahnwesens, und es erwies sich als unumgänglich, über die Bemessung der verwendeten Konstruktions-

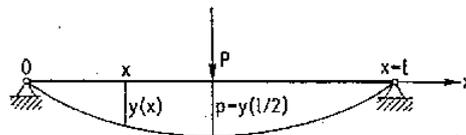
⁶⁶ So muß zum Beispiel für den vollkommen unelastischen Stoß die Gleichheit der Normalgeschwindigkeiten an der Stoßstelle am Ende des Stoßvorganges verlangt werden.

⁶⁷ Die das Billardspiel betreffenden Ausführungen befinden sich in den Ziffern 474–478 des 7. Kapitels (S. 211–221). Hierbei wird notwendigerweise die Reibung zwischen den Kugeln untereinander, zwischen den Kugeln und der Unterlage sowie zwischen den Kugeln und der Bande berücksichtigt. Für eine kurze Einsichtnahme in diese Problematik sei verwiesen auf I. SZABÓ, *Einführung in die Technische Mechanik*, 8. Auflage (1975), S. 391.

teile experimentelle und theoretische Anhaltspunkte zu gewinnen; hierbei mußten auch die stoßartigen Beanspruchungen in Betracht gezogen werden. Angeregt durch die Experimente von EATON HODGKINSON (1789–1861), der schwere Eisenkugeln gegen einen an beiden Enden gestützten Eisenträger fallen ließ⁶⁸, versuchte HOMERSHAM COX (1821–1897), eine aus mechanischen Grundgesetzen folgende Näherungstheorie des Stoßes einer Eisenkugel gegen die Mitte eines Eisenträgers aufzustellen. Seine diesbezügliche Arbeit erschien unter dem Titel *On impacts on elastic beams* in den Cambridge Philosophical Transactions IX, Part. I, S.73–78 (1849).

Bild 197

Zum Stoß einer Kugel auf einen Träger nach der Näherungstheorie von H. Cox.



COX geht von der bekannten Gleichung der Biegelinie eines in der Mitte durch die Einzelkraft P belasteten Balkens mit konstantem (Haupt-)Flächenträgheitsmoment J , der Länge l und dem Elastizitätsmodul E aus⁶⁹ (Bild 197). Diese lautet für $0 \leq x \leq l/2$

$$y(x) = \frac{P}{48 EJ} (3 l^2 x - 4 x^3) = p \left[3 \left(\frac{x}{l} \right) - 4 \left(\frac{x}{l} \right)^3 \right]. \quad (15)$$

Nun beruft sich COX auf die Anwendung des mit dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten gekoppelten d'Alembertschen Prinzips auf Stoßvorgänge in dem schon zitierten *Lehrbuch der Mechanik* von POISSON. Dieser letztere gibt dem Prinzip im Sinne von LAGRANGE die Form⁷⁰

$$\sum m [(v_x - w_x) \delta x + (v_y - w_y) \delta y + (v_z - w_z) \delta z] = 0. \quad (16)$$

Hierbei bedeutet $v = \{v_x; v_y; v_z\}$ die im bindungsfreien Falle auftretenden und $w = \{w_x; w_y; w_z\}$ die wirklichen Geschwindigkeiten, $\delta r = \{\delta x; \delta y; \delta z\}$ die virtuellen Verschiebungen der Massenteile m . COX argumentiert nun so: Bedeutet M die Masse des Trägers, so erreicht sein Element $M dx/l$ in der «unendlich kleinen» Zeit t die Geschwindigkeit $y(x)/t$; da $y(x)$ als die virtuelle Verschiebung des Massenelementes gedeutet werden kann, so hat man im Sinne von (16)

$$\int_{x=0}^l \frac{M}{l} dx \frac{y(x)}{t} y(x) - Bp = \frac{M}{lt} \int_0^l y^2(x) dx - Bp = 0,$$

⁶⁸ Aus seinen im *Report of the meeting of the British Association* (Cambridge 1834 und 1836) und im *Report of the Commissioners appointed to inquire the application of iron to railway structures* (1849) veröffentlichten Ergebnissen lassen sich keine allgemein gültigen Regeln ziehen; die von ihm gemachten Voraussetzungen verführen ihn zu manchen Fehlschlüssen.

⁶⁹ I. SZABÓ, *Einführung in die Technische Mechanik*, 8. Auflage (1975), S.115.

⁷⁰ Band 2, Kap.9, § 535, S.314–315.

wobei B eine auf die Trägermitte bezogene Bewegungsgröße ist. Mit (15) erhält man

$$B = \frac{17}{35} M \frac{p}{t} = \frac{17}{35} M u,$$

wenn $u = p/t$ die Anfangsgeschwindigkeit der Trägermitte bedeutet. Ist m die Masse der auf die Balkenmitte mit der Geschwindigkeit v aufprallenden Kugel, so verlangt der Impulssatz

$$B = \frac{17}{35} M u = m(v-u), \quad (17)$$

woraus für die gemeinsame Geschwindigkeit unmittelbar nach dem Zusammenstoß

$$u = \frac{m}{m + \frac{17}{35} M} v \quad (18)$$

folgt. Somit kann man $(17/35) M$ als die auf Trägermitte «reduzierte Masse» ansehen. Der Faktor $17/35$ entspricht näherungsweise dem von HODGKINSON ohne nähere Begründung vorgeschlagenen Wert von $1/2$ ⁷¹.

Nachdem auf diese Weise die gemeinsame Geschwindigkeit unmittelbar nach dem Zusammenstoß ermittelt ist, kann man für den unelastischen Stoß⁷² aus dem Energiesatz den maximalen Ausschlag p_{\max} in der Trägermitte errechnen: aus

$$\frac{1}{2} \left(m + \frac{17}{35} M \right) u^2 = \frac{1}{2} \frac{m}{m + \frac{17}{35} M} m v^2 = \frac{1}{2} c p_{\max}^2 \quad (19)$$

folgt

$$p_{\max} = \sqrt{\frac{m v}{c \left(m + \frac{17}{35} M \right)}} \quad (19)$$

Hierbei ist c die auf die Trägermitte bezogene «Federkonstante», also diejenige Kraft, die dem Träger an der Stoßstelle die Durchbiegung von einer Längeneinheit erteilt⁷⁴. Für andere Anstoßstellen des Trägers ergibt sich anstelle von $17/35$ ein anderer Faktor

⁷¹ Siehe die in der Fußnote 8 an letzter Stelle angeführte Arbeit (Appendix A, S. 4).

⁷² Der etwa vorliegt, wenn der stoßende Körper in den gestoßenen tief eindringt, oder gar dort steckenbleibt.

⁷³ In der Form $\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} c p_{\max}^2$ – also ohne Berücksichtigung der Trägermasse – kommt diese Beziehung in YOUNG'S *A course of Lectures on Natural Philosophy and mechanical Arts* (1845, Vol. I, S. 57ff.) vor.

⁷⁴ I. SZABÓ, *Einführung in die Technische Mechanik*, 8. Auflage (1975), S. 341.

k , der sich in der heutigen Terminologie mit der angenommenen Affinität von statischer und dynamischer Durchbiegung aus

$$k = \frac{1}{l} \int_0^l \frac{y^2(x)}{y^2(x_0)} dx \quad (20)$$

berechnen läßt⁷⁵. Hierbei ist $y(x)$ die aus der statischen Biegetheorie folgende Durchbiegung und x_0 die Stoßstelle. Diesen aus der Energiegleichung folgenden Faktor verwendet aber COX auch für den Impulssatz (17), und das ist nicht korrekt, vielmehr müßte darin mit einem Faktor

$$\lambda = \frac{1}{l} \int_0^l \frac{y(x)}{y(x_0)} dx \quad (21)$$

gerechnet werden⁷⁶.

Im Falle eines elastischen Stoßes verbleiben keine Verformungen, der stoßende Körper prallt mit der Geschwindigkeit v_1 zurück, und unter Beibehaltung der bisherigen Bezeichnungen liefern der Impulssatz und der Energiesatz die Beziehungen

$$m(v + v_1) = \lambda M u; \quad \frac{1}{2} m(v^2 - v_1^2) = \frac{1}{2} k M u^2; \quad \frac{1}{2} k M u^2 = \frac{1}{2} c p_{\max}^2 \quad (22)$$

Aus ihnen kann man u , v_1 und p_{\max} berechnen. So folgt zum Beispiel aus

$$v_1 = \frac{2v}{1 + \frac{k}{\lambda^2} \frac{m}{M}} - v > 0,$$

daß ein Zurückspringen des stoßenden Körpers nur für $m/M < \lambda^2/k$ erfolgen kann. Die angeführten und auf der erwähnten Affinität basierenden Näherungstheorien können auch auf Plattenstöße angewandt werden⁷⁷.

4 Die erste Wellentheorie des Stoßes von DANIEL BERNOULLI

In den vorangehend geschilderten mechanischen Näherungstheorien werden die beim Stoß auftretenden Schwingungen nicht in Betracht gezogen. Diese können aber unter bestimmten, auf Seite 460 näher genannten Bedingungen die Bewegungen der

⁷⁵ Siehe das vorangehend zitierte Werk, S. 342–343 und S. 375–378.

⁷⁶ Siehe die vorangehend zuletzt zitierte Stelle.

⁷⁷ An diesbezüglichen Arbeiten seien die von K. KARAS im Ingenieurarchiv X, S. 237ff. (1939), und H. ESCHLER im Ingenieurarchiv XII, S. 31ff. (1941), angeführt. Es sei auch noch verwiesen auf I. SZABÓ, *Höhere Technische Mechanik*, 5. Auflage (1972), S. 242–247.

am Stoß beteiligten Körper erheblich beeinflussen und einen nicht unwesentlichen Teil der ins Spiel gebrachten kinetischen Energie verzehren. Aus diesem Grunde wandten sich die Forscher den beim Stoß auftretenden elastischen Schwingungen (Wellen) zu. Der erste diesbezügliche Versuch erfolgte schon sehr früh: Etwa achtzig Jahre vor den mechanischen Näherungstheorien publizierte DANIEL BERNOULLI (Bild 198) seine Arbeit *Examen physico-mechanicum de motu mixto qui laminis elasticis a percussione simul imprimitur*⁷⁸. Diese Arbeit ist von jener Art erfrischender und richtungsweisender Klarheit, die man bei DANIEL BERNOULLI so oft bewundern

⁷⁸ Novi Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, XV, S. 361ff. (1770).

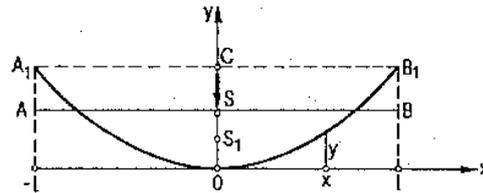


Bild 198
DANIEL BERNOULLI (1700–1782).

kann⁷⁹. Die Publikation enthält aber auch für den heutigen Leser etwas Überraschendes an mechanisch-mathematischer Methode, die – anscheinend völlig vergessen! – ein Jahrhundert später, mit den Namen RAYLEIGH und RITZ verbunden, zur vollen Entfaltung kam.

DANIEL BERNOULLI faßt zwei Probleme von «gemischten», durch Stoß eingeleiteten Bewegungen eines Körpers ins Auge. An erster Stelle wird die Bewegung eines geraden, starren und freien Stabes betrachtet, der an irgendeiner Stelle angestoßen, eine Translationsbewegung und eine Drehung um den Schwerpunkt ausführt. Das zweite uns interessierende Problem ist das eines geraden, elastischen, homogenen und freien Stabes konstanten Querschnittes, der in der Mitte angestoßen wird. Gefragt wird nach der – aus elastischer Schwingung und Translation bestehenden – Bewegung. Vor dem Stoß hat der Stab die gerade Lage $AB = 2l$ und wird dann im Mittel- bzw. Schwerpunkt S angestoßen (Bild 199). Durch den Stoß kommt der Stab «sukzessive»

Bild 199
Zur Wellentheorie des Stoßes nach D. BERNOULLI.



in die gekrümmte Lage A_1OB_1 (maximaler Auslenkung), und sein Schwerpunkt gelangt nach S_1 . Nun sieht BERNOULLI in der Kurve A_1OB_1 auch einen «Repräsentanten» für die Geschwindigkeiten⁸⁰. Dementsprechend ist die Strecke SS_1 ein Maß für die (Translations-)Geschwindigkeit und S_1O dasjenige für die Geschwindigkeit der elastischen Schwingung des Schwerpunktes, während OS die absolute Geschwindigkeit desselben Punktes repräsentiert. Nun benutzte DANIEL BERNOULLI ein Minimalprinzip der folgenden Form: Unter allen möglichen Kurven ist die wirkliche Kurve A_1OB_1 diejenige, zu deren Erzeugung ein Minimum an «lebendiger Kraft»⁸¹ erforderlich ist. Diese Kurve soll der Grundschwingung, also der ersten (niedrigsten) Eigenfrequenz entsprechen und nur allein in Betracht gezogen werden. Bezeichnet (Bild 199) $OC = a$ die Amplitude der elastischen Linie und setzt man weiter $OS = h$ sowie $y = y(x) = a\varphi(x)$, so ist

$$dL = [h - a\varphi(x)]^2 dx$$

⁷⁹ In diesem Zusammenhang sei hingewiesen auf *Die Geschichte der Theorie der schwingenden Saite* in Kapitel IV (insbesondere Ziffer 7) und *Der philosophische Streit um das wahre Kraftmaß* in Kapitel II (insbesondere Ziffer 6).

⁸⁰ Dies trifft zu bei einer zeitlich harmonischen Bewegung, die D. BERNOULLI – etwa in der Form $f(x) \cdot \sin(\omega t + \alpha)$ – als selbstverständlich voraussetzt. Dementsprechend geht $f^2(x)$ in die kinetische Energie eines Stabelementes ein. Siehe hierzu I. SZABÓ, *Einführung in die Technische Mechanik*, 8. Auflage (1975), S. 467–469.

⁸¹ Das ist das Produkt aus Masse und Geschwindigkeitsquadrat, also die zweifache kinetische Energie.

ein Maß für die lebendige Kraft eines Stabelementes⁸². Damit erscheint die schon angeführte Minimierung in der Form.

$$L(a) = 2 \int_{x=0}^l [h - a \varphi(x)]^2 dx = \text{Minimum.}$$

Aus $dL(a)/da = 0$ und nach Wiedereinführung von $\varphi(x) = y(x)/a$ erhält man

$$h = \int_0^l y^2(x) dx : \int_0^l y(x) dx, \quad (23)$$

also einen dem sogenannten «Rayleighschen Quotienten» analogen Ausdruck. Daß hier nicht der übliche aus dem Energieprinzip folgende und das Quadrat der ersten Eigenkreisfrequenz angegebende Quotient aus der maximalen Formänderungsarbeit und von der «bezogenen kinetischen Energie» erscheint⁸³, liegt daran, daß DANIEL BERNOULLI als Energiegröße allein die kinetische Energie in Betracht zieht. Da aber der Maximalwert der kinetischen Energie dem der Formänderungsarbeit gleich sein muß, erscheint bei ihm (wie bei LAGRANGE auf S. 130) das heute übliche «Prinzip vom Minimum der Formänderungsarbeit» als ein Minimalprinzip der kinetischen Energie. DANIEL BERNOULLI fährt – wie wir heute sagen würden – «im Sinne von RAYLEIGH-RITZ» weiter fort und approximiert den der ersten Eigenfrequenz entsprechenden und von ihm auch angeführten Ausdruck

$$y(x) = \alpha e^{\frac{x}{f}} + \beta e^{-\frac{x}{f}} + \gamma \sin\left(\frac{x}{f} + \varepsilon\right)$$

durch die Parabel

$$y(x) = a(x/l)^2.$$

Daraus ergibt sich zunächst für die Lage des Schwerpunktes (Bild 199) $OS_1 = a/3$ und nach (23) $h = 3a/5$. Als weitere Größen folgen $SS_1 = 4a/15$ und $CS = 2a/5$. Nun bestimmt D. BERNOULLI die aus Translation und elastischer Schwingung hervorgehenden lebendigen Kräfte. Für die Translationsenergie ist die Schwerpunktsbewegung maßgeblich, und da seine für die Geschwindigkeit repräsentative Verschiebung $SS_1 = 4a/15$ beträgt, wird – weil für die Masse wiederum die gesamte Stablänge $2l$ in Anschlag zu bringen ist – die lebendige Kraft $L_{Tr} = (32/225) a^2 l$. Die der Schwingung entsprechende lebendige Kraft ist offenbar (Bild 199)

$$L_s = \int_{-l}^l \left[\frac{1}{3} a - y(x) \right]^2 dx = \int_{-l}^l \left[\frac{1}{3} a - a \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right]^2 dx = \frac{8}{45} a^2 l.$$

⁸² Hierbei wurde wegen der flachen Durchbiegung das für das Massenelement maßgebliche Bogenelement ds dem Abszissenelement dx gleichgesetzt.

⁸³ Siehe des Verfassers *Höhere Technische Mechanik*, 5. Auflage (1972), S. 83–85, und die in der Fußnote 80 angeführte Stelle der *Einführung in die Technische Mechanik*.



Bild 200

FRANZ NEUMANN (1798-1895).

Der Stab empfängt also infolge des Stoßes als gesamte lebendige Kraft

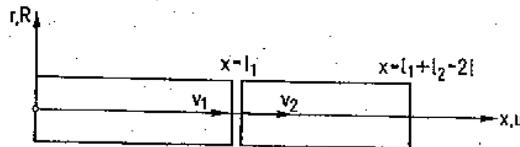
$$L = L_{\text{Tr}} + L_s = \frac{8}{25} a^2 l,$$

so daß die infolge der Schwingungen verzehrte lebendige Kraft $5/9$, also mehr als die Hälfte der gesamten Bewegungsenergie beträgt. Man kann bei DANIEL BERNOULLI auch hier das genial Einfache der Überlegungen, die Fähigkeit zum Erkennen der wesentlichen Frage und das bestechende mathematische Erfassen eines Problems nicht genug bewundern.

5 Die Wellentheorie des Stoßes von FRANZ NEUMANN⁸⁴

Nach der mathematischen Erfassung des allgemeinen Spannungszustandes in einem Kontinuum mittels des Spannungstensors durch A. L. CAUCHY und seiner Kopplung mit den linearen (Hookeschen) Materialgesetzen in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts bestand die auch mathematisch reizvolle Möglichkeit, den Stoßvorgang als ein elastokinetisches Problem zu behandeln. Den ersten bedeutenden Beitrag lieferte FRANZ NEUMANN (Bild 200). In seinen 1857/58 gehaltenen und 1885 gedruckten *Vorlesungen über die Theorie der Elastizität der festen Körper und des Lichtäthers* behandelt er (20. Kapitel, S. 332–350) die «Theorie des geraden Stoßes cylindrischer Körper».

Bild 201
Zum longitudinalen Stoß zweier dünner
Kreiszyylinder nach F. NEUMANN.



Im Gegensatz zu POISSON untersucht NEUMANN den longitudinalen Zusammenstoß zweier dünner kreiszylindrischer Stäbe gleichen Querschnittes der Länge l_1 und l_2 als räumliches elastokinetisches Problem. Die Stäbe sollen aus demselben homogenen Material bestehen und zur Zeit $t = 0$ mit den Geschwindigkeiten v_1 und v_2 ($v_1 > v_2$) zusammenstoßen (Bild 201). Aus den Bewegungs- und Materialgleichungen gehen für die axiale Verschiebung $u = u(x, r, t)$ und für die radiale Verschiebung $R = R(x, r, t)$ zwei gekoppelte lineare partielle Differentialgleichungen hervor (S. 337). Mit den (in quadratischen Gliedern abgebrochenen Reihenansätzen)

$$u = w(x, t) + W(x, t) r^2; \quad R = f(x, t) + F(x, t) r^2 \quad (24)$$

und der Bedingung, daß die Zylinderoberflächen spannungsfrei sind, erhält NEUMANN

⁸⁴ Eine Kritik dieser Theorie gibt R. FRISCHBIER, *Zur Lösung des Körperstoßproblems*, ZAMM 57, S. 629–642. (1977).

– mit dem Genauigkeitsgrad der Ansätze (24) – für die unbekannte Funktion w die Wellengleichung (14):

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (25)$$

Ist die Lösung dieser Differentialgleichung gefunden, so hat man für die axiale Geschwindigkeit v und die Normalspannung σ_x in derselben Richtung

$$v = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad \sigma_x = E \frac{\partial w}{\partial x} \quad (26)$$

Als Lösung der Differentialgleichung (25) verwendet NEUMANN die sogenannte d'Alembertsche Lösung⁸⁵

$$w = f(x + ct) + \varphi(x - ct), \quad (27)$$

wobei f und φ zunächst willkürliche Funktionen der angedeuteten Argumente sind. Zur Bestimmung dieser Funktionen stehen die gemäß (26) und (27) leicht einzusehenden Anfangsbedingungen ($t = 0$)

$$\frac{\partial w}{\partial t} = c [f'(x) - \varphi'(x)] = v_1 \quad \text{für } 0 < x < l_1,$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = c [f'(x) - \varphi'(x)] = v_2 \quad \text{für } l_1 < x < l_1 + l_2 = 2l$$

zur Verfügung⁸⁶ (Bild 201), und da die Stäbe anfangs spannungsfrei (ungedehnt) waren, ist

$$\frac{\partial w}{\partial x} = f'(x) + \varphi'(x) = 0 \quad \text{für } 0 < x < l_1 + l_2 = 2l.$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich

$$f'(x) = \frac{v_1}{2c}, \quad \varphi'(x) = -\frac{v_1}{2c} \quad \text{für } 0 < x < l_1,$$

$$f'(x) = \frac{v_2}{2c}, \quad \varphi'(x) = -\frac{v_2}{2c} \quad \text{für } l_1 < x < l_1 + l_2.$$

⁸⁵ Siehe Kapitel IV, Abschnitt A, Ziffer 5.

⁸⁶ Striche bedeuten Ableitungen nach dem Gesamtargument.

Die Spannungsfreiheit an den freien Endflächen ($x = 0$ und $x = 2l$) liefert nach (26) mit (27) die für alle t gültigen Beziehungen

$$f'(ct) + \varphi'(-ct) = 0, \quad f'(2l+ct) + \varphi'(2l-ct) = 0.$$

Durch Einsetzen von $ct = l_1, l_2, l_1 + l_2, \dots$ gestatten diese Gleichungen, den Wert von f' für jedes positive und denjenigen von φ' für jedes negative Argument zu berechnen. Die Geschwindigkeiten und Spannungen sind dann durch

$$\frac{\partial w}{\partial t} = c [f'(x+ct) - \varphi'(x-ct)]$$

und

$$\sigma_x = E \frac{\partial w}{\partial x} = \rho c^2 [f'(x+ct) + \varphi'(x-ct)]$$

gegeben. Für nähere Einzelheiten und interessante Spezialfälle sei auf NEUMANN'S Originalarbeit verwiesen⁸⁷.

- ⁸⁷ In einer außerordentlich umfangreichen Arbeit behandelt B. DE SAINT-VENANT⁸⁸ dasselbe Problem mit anderen mathematischen Mitteln. Er zieht die Charakteristentheorie partieller Differentialgleichungen heran und verwendet – abgesehen von einem kurzen Teil am Anfang – als Lösungen Fourierreihen. Im Gegensatz zu NEUMANN'S Arbeit erschwert die verwirrende Fülle die Überschaubarkeit der Ergebnisse.

6 Die Theorie der Härte von HEINRICH HERTZ und ihre Anwendung auf den Stoß

Unter dem Titel *Über die Berührung fester elastischer Körper* veröffentlichte⁸⁹ HEINRICH HERTZ, dessen Ruhm üblicherweise nur in der Entdeckung der elektrischen Wellen manifestiert ist, im Jahre 1882 eine Arbeit, deren Ausschöpfung sowohl für die Elastostatik wie auch für die Theorie des elastischen Stoßes ungemein befruchtend wirkte. Diese Publikation ist, verglichen mit dem in ihr liegenden Reichtum an mechanischer und mathematischer Substanz, ungewöhnlich kurz⁹⁰ und erfordert in mathematischer Hinsicht vollkommene Vertrautheit mit schwierigen potentialtheoretischen Sätzen⁹¹.

⁸⁷ Siehe auch GEIGER/SCHEEL, *Handbuch der Physik*, Bd. VI (1928), S. 526 ff.

⁸⁸ *Journal des Mathématiques* (Ser. 2) 12, S. 237–376 (1862).

⁸⁹ *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 32, S. 156 ff. (1882).

⁹⁰ 15 Seiten! Vergleiche die in Fußnote 88 zitierte Arbeit von DE SAINT-VENANT, die auf 140 Seiten gegenüber NEUMANN nichts wesentlich Neues brachte.

⁹¹ Eine vereinfachte Darstellung findet man in I. SZABÓ, *Höhere Technische Mechanik*, 5. Auflage (1972), S. 171–179.

HEINRICH HERTZ (Bild 202) formuliert das anstehende Problem so:

«Im Folgenden wollen wir einen Fall behandeln, der praktisches Interesse hat, den Fall nämlich, daß zwei elastische isotrope Körper sich in einem sehr kleinen Teil ihrer Oberfläche berühren, und durch diesen Teil einen endlichen Druck der eine auf den anderen ausüben. Die sich berührenden Oberflächen stellen wir uns als vollkommen glatt vor, d. h. wir nehmen nur einen senkrechten Druck zwischen den sich berührenden Teilen an. Das beiden Körpern nach der Deformation gemeinsame Stück der Oberfläche wollen wir die Druckfläche, die Begrenzung dieses Stückes Druckfigur nennen: Die Fragen, deren Beantwortung uns naturgemäß zunächst obliegt, sind die nach der Fläche, von welcher die Druckfläche ein unendlich kleiner



Bild 202
HEINRICH HERTZ (1857–1894).

Teil ist, die Frage nach der Form und absoluten Größe der Druckfigur, die Frage nach der Verteilung des senkrechten Druckes in der Druckfläche. Von Wichtigkeit ist die Bestimmung der Maximaldrucke, welche in den aneinander gepreßten Körpern vorkommen, insofern von diesen es abhängt, ob der Druck ohne bleibende Deformation ertragen wird; von Interesse ist endlich die Annäherung der beiden Körper, welche durch einen bestimmten Gesamtdruck hervorgerufen wird.»

Mit einer bewunderungswürdigen mechanischen und mathematischen Perfektion löst HERTZ die aufgeworfenen Fragen. Die Formeln, die er erhält, vereinfachen sich sehr für zwei Kugeln (Radien R_1 und R_2 , Schubmoduli G_1 und G_2 , Querkontraktionszahlen ν_1 und ν_2), die mit der Gesamtdruckkraft P gegeneinander gepreßt werden: für die Annäherung (Abplattung) der beiden Kugeln ergibt sich

$$u = \sqrt[3]{\frac{9}{64} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \left(\frac{1-\nu_1}{G_1} + \frac{1-\nu_2}{G_2} \right)^2 P^2} = \alpha P^{\frac{2}{3}}. \quad (28)$$

Diese Formel läßt sich auch auf den Stoß anwenden. HERTZ schreibt:

«Zum Schluß wollen wir von den erlangten Formeln eine Anwendung machen auf den Stoß elastischer Körper. Sowohl aus schon vorhandenen Beobachtungen, als auch aus den Resultaten der gleich anzustellenden Betrachtungen folgt, daß die Stoßzeit, d. h. die Zeit, während welcher die stoßenden Körper in Berührung sind, wenn auch absolut sehr klein, doch sehr groß ist im Verhältnis zu derjenigen Zeit, welche elastische Wellen nötig haben, um in den in Rede stehenden Körpern Längen von der Ordnung desjenigen Teils der Oberflächen zu durchlaufen, welcher beiden Körpern in ihrer größten Annäherung gemeinsam ist, und welchen wir die Druckfläche nennen. Daraus folgt, daß der elastische Zustand beider Körper in der Nähe des Stoßpunktes während des ganzen Verlaufs des Stoßes sehr nahezu gleich ist dem Gleichgewichtszustand, den der zwischen beiden Körpern in jedem Augenblick vorhandene Gesamtdruck bei längerer Dauer hervorbringen würde. Bestimmen wir daher den zwischen beiden Körpern bestehenden Druck aus der Beziehung, welche wir zwischen diesem Druck und der Annäherung in Richtung der gemeinsamen Normale früher für ruhende Körper aufgestellt haben, und wenden im übrigen auf das Innere jedes der beiden Körper die Differentialgleichungen für bewegte elastische Körper an, so werden wir den Verlauf des Vorganges mit großer Annäherung erhalten.»

Demnach haben wir für die zeitlich veränderliche Stoßkraft gemäß (28)

$$P = P(t) = \left[\frac{u(t)}{\alpha} \right]^{\frac{3}{2}} \quad (29)$$

zu setzen. Bezeichnen wir mit m_1 und m_2 die Massen zweier zentral stoßender Kugeln, mit $x_1(t) = x_1$, $x_2(t) = x_2$ ihre Schwerpunktskoordinaten auf der gemeinsamen Stoßnormalen, so folgen aus dem Schwerpunktsatz und dem Reaktionsprinzip die Beziehungen

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = m_1 \ddot{x}_1 = -P(t), \quad m_2 \ddot{x}_2 = P(t),$$

aus denen sich mit (29)

$$\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 = \ddot{u} = - \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} P(t) = - \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \left(\frac{u}{\alpha} \right)^{\frac{3}{2}}$$

ergibt. Diese Differentialgleichung für $u = u(t)$ läßt sich elementar integrieren⁹². Man erhält

$$v_r^2 - \dot{u}^2 = \frac{4}{5} \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \frac{u^{5/2}}{\alpha^{3/2}}, \quad (30)$$

wobei $v_r = v_1 - v_2$ die Relativgeschwindigkeit der beiden Kugeln vor dem Stoß ist. Aus (30) ergibt sich für $\dot{u}^2 = 0$ die maximale Annäherung und nach (29) die dazugehörige maximale Stoßkraft zu

$$u_{\max} = \left(\frac{5}{4} \alpha^{\frac{3}{2}} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right)^{\frac{2}{5}} v_r^{\frac{4}{5}}, \quad P_{\max} = \left[\frac{5}{4} \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2) \alpha} v_r^2 \right]^{\frac{3}{5}}. \quad (31)$$

Berechnet man aus (30) $\dot{u} = du/dt$, so liefert die Integration zwischen $u = 0$ und $u = u_{\max}$ die halbe Stoßzeit; als gesamte Stoßdauer ergibt sich⁹³

$$T = 2,9432 \sqrt[5]{\frac{25 \alpha^3}{16} \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}}. \quad (32)$$

Für zwei gleiche Kugeln folgt mit dem aus (28) ersichtlichen Wert von α

$$T = 4,4286 R \sqrt[5]{\frac{\rho^2 (1-\nu)^2}{G^2 v_r}}. \quad (33)$$

Stoßen zwei Stahlkugeln vom Durchmesser $2R = 3$ cm mit der Relativgeschwindigkeit $v_r = v_1 - v_2 = 1$ m sek⁻¹ zusammen, so beträgt die Stoßdauer nach (33) $T = 0,895 \cdot 10^{-4}$ sek, also weniger als eine Zehntausendstel Sekunde. Würden dagegen zwei gleich große Stahlkugeln von $R = 6370$ km (Erdradius) mit $v_r = 1$ cm sek⁻¹ aufeinanderstoßen, so betrüge die schon von HERTZ angegebene Stoßdauer 26,5 Stunden, also mehr als einen Tag!

Führt man in (33) das Geschwindigkeitsquadrat der Kompressionswellen ein, nämlich $c^2 = E/\rho = 2G(1+\nu)/\rho$, so ergibt sich für die Stoßdauer

$$T = 5,85 R \sqrt[5]{\frac{(1-\nu^2)^2}{v_r c^4}}. \quad (34)$$

⁹² Siehe Fußnote 91.

⁹³ Siehe Fußnote 91.

Damit kann man die Stoßzeit mit der Laufzeit T_w der Kompressionswellen vergleichen. Für die «Laufstrecke» der Kompressionswellen nehmen wir, wie HERTZ an der vorangehend zitierten Stelle vorschlägt, den größten Radius a der Druckflächen, den wir aus der Arbeit von HERTZ als

$$a = R \left[\frac{5\pi}{16} \frac{(1-\nu)^2}{1-2\nu} \right]^{\frac{1}{5}} \left(\frac{v_r}{c} \right)^{\frac{3}{5}}$$

entnehmen können.

Mit $T_w = a/c$ erhalten wir

$$\frac{T}{T_w} = 6 [(1+\nu)^2 (1-2\nu)]^{\frac{1}{5}} \left(\frac{c}{v_r} \right)^{\frac{3}{5}}. \quad (35)$$

Die Hertzsche Annahme ($T/T_w \gg 1$) wird also solange zutreffen, bis die relative Geschwindigkeit vor dem Zusammenstoß klein gegenüber der Geschwindigkeit der Kompressionswellen ist.

Für zwei gleiche Stahlkugeln ($\nu = 1/3$, $E = 2 \cdot 10^6$ kp cm⁻², $\rho = 8 \cdot 10^{-6}$ kp sek² cm⁻⁴) ergibt sich (wenn man v_r in cm sek⁻¹ einsetzt) $T/T_w = 1300/v_r^{3/5}$, so daß auch noch für die Größenordnung von $v_r \approx 100$ cm sek⁻¹ für $T/T_w \approx 100 \gg 1$ folgen würde.

Die Hertzsche Theorie wurde von STEFAN TIMOSHENKO (*1878) verwendet, um den Stoß einer Kugel ($R_1 = R$) gegen die Mitte eines prismatischen Balkens ($R_2 = \infty$) zu untersuchen⁹⁴. Unter Verwendung der Formel (28) und einer von TIMOSHENKO schon früher angegebenen Beziehung für erzwungene Schwingungen ergibt die Gleichheit der Verschiebungen der mit der Geschwindigkeit v_0 anstoßenden Kugel (Masse m) und der Balkenmitte ($x = l/2$) die Beziehung

$$v_0 t - \frac{1}{m} \int_0^t P(\tau) (t-\tau) d\tau = \alpha P^{\frac{2}{3}}(t) + \sum_{j=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{2}{\omega_j l \mu} \int_0^t P(\tau) \sin \omega_j (t-\tau) d\tau. \quad (36)$$

Hier bedeutet μ die Masse des Balkens pro Längeneinheit (μl ist also die gesamte Balkenmasse) und

$$\omega_j = \left(\frac{j\pi}{l} \right)^2 \sqrt{\frac{EJ}{\mu}}$$

die Eigenkreisfrequenz des Balkens.

Nun ist (36) eine sogenannte Integralgleichung für die Stoßkraft $P = P(t) \geq 0$; insbesondere bestimmt die Nullstelle von $P(t)$ die Stoßdauer. TIMOSHENKO erhält eine Näherungslösung, indem er die Zeitspanne $0 \leq \tau \leq t$ in n gleiche Zeitintervalle teilt und

⁹⁴ S. TIMOSHENKO, *Zur Frage nach der Wirkung eines Stoßes auf einen Balken*, Zeitschrift für Mathematik und Physik 62, S. 198ff. (1913).

voraussetzt, daß innerhalb eines solchen Abschnittes P die konstanten Werte P_1, P_2, \dots annimmt, die dann in konkreten (zahlenmäßig gegebenen) Fällen mit einigen Kunstgriffen ermittelt werden.

Das Verfahren von TIMOSHENKO wurde von J. LENNERTZ verallgemeinert und methodisch verbessert⁹⁵.

7 Experimentelle Untersuchungen des Stoßes

Mit der Verfeinerung der optischen und elektrischen Möglichkeiten zur Strecken- und Zeitmessung begannen auch die experimentellen Versuche, den Ablauf des Stoßvorganges messend zu verfolgen, um einerseits eigene Einsichten zu gewinnen, andererseits die Ergebnisse der vorhandenen Stoßtheorien mit denen des Experiments zu vergleichen. Der auch theoretisch hervorragende Physiker WALDEMAR VOIGT (1850–1919) stellte Versuche an, um durch die Messung der Geschwindigkeiten vor und nach dem Stoß die Neumann-de-Saint-Venantsche Theorie des (longitudinalen) Stoßes zylindrischer Stäbe nachzuprüfen⁹⁶. VOIGT benutzte zwei zylindrische Stäbe, die an je vier Fäden horizontal aufgehängt, durch Auspendeln zum Stoß gebracht wurden. Die auftretenden Amplituden wurden so klein gehalten, daß sie als Maß für die Geschwindigkeiten angesehen werden konnten. VOIGTS Messungen führten zu Ergebnissen, die mit denen von NEUMANN und DE SAINT-VENANT unvereinbar waren. VOIGT stellte – quasi zur Rettung seiner experimentellen Ergebnisse – eine neue Theorie auf, indem er in der Stoßfläche eine elastische «Zwischenschicht» annimmt. Er kann zwar zeigen, daß für extreme, aber schwer realisierbare Fälle seine Theorie zu der von NEUMANN und DE SAINT-VENANT «tendiert», aber die zu seiner «Zwischenschicht» benötigten Materialkonstanten bleiben unbestimmbar.

Im Gegensatz zu VOIGT hat MAX HAMBURGER in seiner Dissertation *Untersuchungen über die Zeitdauer des Stoßes elastischer zylindrischer Stäbe* (Breslau 1885) Experimente zur elektrischen Messung der Stoßdauer angestellt. Auch seine Ergebnisse konnten mit denen von DE SAINT-VENANT nicht in Einklang gebracht werden; dagegen bestätigten sie, wie auch Messungen anderer, die Hertzsche Theorie.

Einen bedeutenden Fortschritt in der experimentellen Prüfung und in der theoretischen Klärung des Stoßes brachte die Heidelberger Habilitationsschrift *Experimentelle und theoretische Grundlagen des elastischen und mechanischen Stoßes*⁹⁷ von CARL RAMSAUER. Er stellt eine mathematisch außerordentlich einfache und auf seine große Experimentierkunst zugeschnittene Theorie auf. Gemessen wurden die Deformation während des Stoßes, die Stoßdauer und die Geschwindigkeiten vor und nach dem Stoß. RAMSAUERS leitender Gedanke war, daß die Diskrepanz zwischen den Resultaten der Neumann-de-Saint-Venantschen Theorie und den experimentellen Beobachtun-

⁹⁵ J. LENNERTZ, *Beitrag zur Frage nach der Wirkung eines Querstoßes auf einen Stab*, Ing.-Archiv 8, S. 37ff. (1937).

⁹⁶ *Die Theorie des longitudinalen Stoßes zylindrischer Stäbe*, Annalen der Physik 19, S. 44ff. (1883).

⁹⁷ Abgedruckt in Annalen der Physik 4. Folge, 30, S. 417ff. (1909).

gen in der mangelhaften Erfüllung der vollkommenen Elastizität – insbesondere in der Stoßfläche – liegt. Darum sorgte er durch Anwendung von Spiralfedern und Kautschukzylindern mit Elfenbeinköpfen dafür, daß der Stoßdruck gleichmäßig über den Querschnitt verteilt wird. Auf diese Weise findet er die elastische (Wellen-)Theorie bestätigt. Den reinen mechanischen Stoß verwirklicht er durch Anmontieren von Federköpfen auf Stahlzylindern.

Einen wesentlichen Beitrag zur experimentellen und theoretischen Beherrschung des Stoßablaufes lieferte FRANZ BERGER in seiner Monographie *Kraftverlauf beim Stoß* (Braunschweig 1924). Durch eine sinnreiche Meßvorrichtung verfolgt er den zeitlichen Verlauf der Stoßkraft und gibt auch über die bis dahin vorliegenden theoretischen und experimentellen Arbeiten einen kritischen Überblick.

Die heutige Experimentiertechnik erlaubt die Messung und insbesondere die zeitliche Verfolgung der verschiedenartigsten Stoßvorgänge mit großer Genauigkeit. In diesem Zusammenhang sei verwiesen auf die Arbeiten (mit reichen Literaturangaben) von H.-H. EMSCHERMANN und K. RÜHL⁹⁸, H. SCHWIEGER und V. REIMANN⁹⁹ und von J. TRÄGER¹⁰⁰.

8 Neuere Arbeiten zur Wellentheorie stoßartiger Belastungen

Die übliche Biegetheorie, die die Einflüsse der Schubspannungen und der rotatorischen Trägheit außer acht läßt, ist nur im beschränkten Maße fähig, die Wirkungen stoßartiger Belastungen von Balken oder Platten zu beschreiben. Die ersten diesbezüglichen Hinweise verdanken wir H. LAMB¹⁰¹ und S. TIMOSHENKO¹⁰². Letzterer gibt als korrigierte Differentialgleichung für die transversale Auslenkung $w = w(x, t)$ eines Biegestabes

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{c_s^2} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{1}{c^2 c_s^2} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} + \frac{1}{c^2 i^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (37)$$

an; hier bedeutet i den Trägheitsradius des konstanten Balkenquerschnittes, $c^2 = E/\rho$, $c_s^2 = \lambda G/\rho$, wobei λ eine die Querkraft und Schubspannung verbindende Konstante ist.

Auf Grund der Differentialgleichung (37) hat W. FLÜGGE nachgewiesen¹⁰³, daß die erwähnten Korrekturen unerläßlich sind, wenn man zu endlichen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten kommen will. Die charakteristischen Geschwindigkeiten sind $\pm c$

⁹⁸ Beanspruchung eines Biegeträgers bei schlagartiger Querbelaugung, VDI-Forschungsheft 44 (1954).

⁹⁹ Spannungsoptische Untersuchung des Querstoßes auf eine Kreisplatte, ZAMM 39, S. 198 ff. (1959), und Der Biegestoß auf eine elastische Rechteckplatte, Forsch. Ing.-Wes. 30, N. 3, S. 140 ff. (1964).

¹⁰⁰ Verfahren zur Untersuchung dynamischer Beanspruchungsprobleme, ZAMM 52, Heft 10, S. 348 ff. (1972).

¹⁰¹ On waves in an elastic plate, Proc. Roy. Soc. London Ser. A 93, 1971.

¹⁰² On the transverse vibrations of bars of uniform cross section, Phil. Mag., Ser. 6, 43 (1922).

¹⁰³ Die Ausbreitung von Biegunswellen in Stäben, ZAMM 22, S. 312 ff. (1942).

und $\pm c_s$. Die erste ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit eines Biegemomentensprunges, die zweite die einer Unstetigkeit der Querkraft. Beide Unstetigkeiten breiten sich mit senkrechter Stirn und konstanter Sprunghöhe aus.

Weitere und neue Einsichten bringende Beiträge stammen von H. SCHIRMER¹⁰⁴ und M. A. DENGLER¹⁰⁵.

9 Schlußbemerkungen

Es gibt noch einige in das Gebiet der Spiele gehörige Erscheinungen, deren quantitative Beschreibung von einem Stoßvorgang ausgeht. Die bekanntesten Beispiele sind das Billard-, das Tennis- und das Golfspiel. Es wurde schon darauf hingewiesen¹⁰⁶, daß der Zusammenstoß elastischer Kugeln untereinander und mit der Bande das Grundproblem des Billardspiels bildet, dessen Theorie G. CORIOLIS (1792–1843) ein ganzes Buch widmete¹⁰⁷. Mit der Beschreibung bzw. quantitativen Erklärung der Flugbahn eines vom Schläger getroffenen Tennisballes beschäftigte sich schon NEWTON im Jahre 1671¹⁰⁸. Zahlreiche Abhandlungen über die Bewegung des Golfballes wurden in England verfaßt. Einen ausgezeichneten Überblick über die Theorie der angeführten Spiele gab G. T. WALKER unter dem Titel *Spiel und Sport* in der *Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften*¹⁰⁹.

¹⁰⁴ Über Biegewellen in Stäben, Ing.-Archiv 20, S. 247ff. (1952).

¹⁰⁵ Transversale Wellen in Stäben und Platten unter stoßförmiger Belastung, Österr. Ing.-Archiv 10, Heft 1, S. 39ff.

¹⁰⁶ Fußnote 17.

¹⁰⁷ *Théorie mathématique des effets du jeu de billard* (Paris 1835).

¹⁰⁸ ISAACI NEWTONI, *Opera quae exstant omnia*, Vol. 4, (London 1779–1785), S. 297.

¹⁰⁹ Bd. IV, 2 Teilbd., Ziffer 9, S. 127ff.