VI. *Die Theorie des longitudinalen Stosses cylindrischer Stäbe; von W. Voigt.*

(Ueberarbeitet und vervollständigt aus den Sitzungsber. der Berl. Acad. der Wiss. vom 22. Juni 1882.)

Der Stoss zweier cylindrischer Körper, deren Querschnitt klein ist gegen ihre Länge, ist als Problem der Elasticität zuerst von Cauchy[1]) behandelt worden, welcher aber nur einige Resultate seiner Entwicklungen, nicht diese selbst veröffentlicht hat. Später hat Poisson eine Lösung des Problems gegeben.[2]) Sein Grundgedanke ist, dass während der Dauer ihrer Berührung die verschiedenen stossenden Stäbe angesehen werden können als einen einzigen zusammensetzend, sodass für diese Zeit diejenigen Betrachtungen, welche die longitudinalen Schwingungen von Prismen ergeben, Anwendung finden. Um die Trennung der einzelnen Theile zu bewirken, ist nach ihm erforderlich und hinreichend: erstens, dass zu beiden Seiten der Berührungsstelle die Spannung gleich Null ist, damit nicht der eine Stab gegen den anderen gedrückt wird, und zweitens, dass zugleich eine Geschwindigkeitsdifferenz der sich berührenden Grenzelemente im Sinne einer Trennung vorhanden ist. Auf Grund dieser Definition gelangt er zu dem Resultat, dass vollständig elastische Stäbe nach dem Stoss stets zusammenbleiben, mit Ausnahme des einzigen Falles, dass sie gleichartig und gleichgestaltet sind.

In den funfziger Jahren hat zuerst Hr. Geh. Rath F. Neumann in seinen Vorlesungen über Elasticität an hiesiger Universität den Fehler aufgedeckt, der in der Poisson'schen Definition des Zeitpunktes der Trennung liegt, und bei der vorgetragenen Lösung des Problems darauf hingewiesen, wie der Zusammenhang nicht mehr bestehen kann, wenn die elastische Spannung in der Grenzstelle aus einer Druckkraft (begleitet von einer Compression) zu einer Zugkraft (begleitet von einer Dilatation) wird, — eine Bemer-

---

1) Cauchy, Bull. d. Scienc. d. l. Soc. Philomat. Déc. 1826. p. 180.

2) Poisson, Traité de Mécanique § 499 bis 504.

kung, die der Erfahrung so entspricht, dass nicht weiter darauf eingegangen zu werden braucht. Ist in dem Moment, wo eine solche Dilatation in der Berührungsstelle entsteht, überdies eine Geschwindigkeitsdifferenz der Schwerpunkte der Stäbe vorhanden im Sinne einer Trennung, so beendet dieser Augenblick den Stoss, — wenn nicht, kann sich derselbe wiederholen.

Viel später hat (ohne die Neumann'sche Lösung zu kennen) Hr. Saint Venant[1]) das Problem in derselben Weise behandelt, sowohl für gleichartige und gleich dicke Stäbe, als für den allgemeineren Fall, den Neumann seiner Zeit nur andeutungsweise besprochen hat. Noch fehlte aber, soviel ich weiss, eine Prüfung der neuen Theorie, denn die von Schneebeli[2]) veröffentlichten Beobachtungen sind ohne Rücksicht auf dieselbe durchgeführt. Dies bewog mich, einige Messungen anzustellen, um die Geschwindigkeiten der Stäbe nach dem Stoss, wie sie die Beobachtung zeigt, mit den nach der Theorie berechneten zu vergleichen; ich wollte mich dabei auf den einfachsten Fall gleichartiger und gleich dicker Stäbe beschränken, wurde aber am Schluss der Untersuchung durch die Bekanntschaft mit einer Arbeit von Hrn Prof. Boltzmann[3]), wenigstens noch einige Beobachtungsreihen für den Stoss verschieden dicker Stäbe gleicher Art hinzuzufügen.

Im Folgenden werde ich zunächst zeigen, wie die Beobachtungen der genannten Theorie durchaus widersprechen, und sodann versuchen, dieselben durch eine etwas modificirte Theorie zu erklären.

I. Die Beobachtungen sind mit Stäben aus glashartem Stahl von ca. 8 und 11 mm Dicke und 20 bis 40 cm Länge[4]) angestellt, welche mit je vier Fäden von $2^1/_3$ m Länge als Pendel an einem geeigneten nahe der Decke an der Wand des Beobachtungsraumes befestigten Gestelle aufgehängt

1) Saint Venant, Liouville's Journ. (2) **12.** p. 237. 1867.

2) Schneebeli, Pogg. Ann. **143.** p. 239. 1871.

3) L. Boltzmann, Sitzb. d. k. Acad. d. Wissensch. 84. p. 1225. 1881. Wied. Ann. **17.** p. 343.

4) Die Schwierigkeit der Härtung verbot grössere Längen.

waren. Als Zeiger angebrachte feine Spitzen gestatteten, auf einer Theilung die Schwingungsamplituden abzulesen, die der stossende Stab vor dem Zusammentreffen und beide nach demselben erreichten. Der gestossene Stab befand sich anfangs in Ruhe — was die Allgemeingültigkeit der gezogenen Folgerungen augenscheinlich nicht beeinträchtigt, denn die ganze Erscheinung hängt nur von den relativen Geschwindigkeiten ab.

Eine ganz besondere Sorgfalt war darauf zu verwenden nöthig, dass die Stäbe mit ihren Längsaxen in eine Gerade fielen und sich ohne seitliche Schwankungen vor und nach dem Stoss bewegten. Demgemäss wurde der stossende Stab an einem geeignet geschnittenen feinen Papierstreifen in seiner Anfangslage gehalten und erst, nachdem er vollständig beruhigt war, durch Durchbrennen jenes Streifens in Bewegung gesetzt. Nach dem ersten Stoss wurden die ersten Amplituden beider Stäbe gleichzeitig beobachtet. Hr. stud. Wiechert hat mich hierbei freundlichst unterstützt.

Ferner war zu berücksichtigen, dass in der Ruhelage die beiden Stäbe sich berühren mussten, ohne irgend einen Druck aufeinander auszuüben; dies liess sich dadurch prüfen, dass jeder Stab, wenn der andere entfernt wurde, seine Lage ungeändert beibehalten musste; Abweichungen, die 0,1 mm nicht überstiegen, wurden bei der Berechnung der Resultate berücksichtigt. — Um bei der Ablesung der Amplituden Parallaxe zu vermeiden, waren hinter den Scalen Spiegelglasstreifen aufgestellt.

In den folgenden Tafeln sind die Resultate der Beobachtungen mitgetheilt. Die erste Colonne enthält die Anfangsamplitude des stossenden Stabes, der durch eine römische Zahl charakterisirt ist. Die Amplituden sind so klein gewählt, dass sie ohne merklichen Fehler als Maass für die Stossgeschwindigkeit angesehen werden können. Die zweite und dritte Colonne enthalten die ersten Amplituden (resp. Geschwindigkeiten) des stossenden und gestossenen Stabes nach der Trennung.

Jede Ablesung ist öfter wiederholt worden, je nach Umständen fünf- bis zwölfmal, aber da alle Fehlerquellen im gleichen Sinne, nämlich die Amplituden verkleinernd, wirkten, so war es unthunlich, aus allen beobachteten Zahlen das Mittel zu nehmen; es sind vielmehr von vornherein alle auffällig kleinen Werthe, zumal solche Beobachtungen, bei denen die wohl nie vollständig fehlenden seitlichen Schwankungen der Stäbe stark waren, von der Berechnung ausgeschlossen, und nur drei bis vier der grössten der Regel nach benutzt worden. Die einzelnen Ablesungen differirten bei den kleinsten Amplituden (20 mm) kaum um 0,3 mm, bei den grössten (200 mm) um fast 1,5 mm; die Sicherheit der angegebenen Zahlen schätze ich im ersten Falle auf etwa 0,2 mm, im letzten auf 0,5 mm.

Die Längen der verwandten gleich dicken Stäbe I bis IV waren:

$$L_I = L_{II} = 30 \text{ cm}, \quad L_{III} = 20 \text{ cm}, \quad L_{IV} = 40 \text{ cm}$$

und ihre Massen sehr nahe ihren Längen proportional; genauer, wenn man mit μ die mittlere Masse auf 10 cm Länge bezeichnet:

$$\mathfrak{m}_I = 226{,}0 \text{ g} = \mu(3 - 0{,}0022); \quad \mathfrak{m}_{II} = 226{,}1 \text{ g} = \mu(3 - 0{,}0020);$$
$$\mathfrak{m}_{II} = 151{,}4 \text{ g} = \mu(2 + 0{,}0027); \quad \mathfrak{m}_{IV} = 302{,}5 \text{ g} = \mu(4 + 0{,}0016).$$

Dabei war $\mu = 75{,}5$ g.

Der dünnere Stab V hatte eine Länge von 30 cm und wog 115 g.

Tabelle I.

Stäbe von gleichem Querschnitt.

$V_1{}^0$	V_1	V_2	$V_2{}^0$	V_2	V_1
I	I	II 1)	II	II	I 2)
20	0,3	19,7	20	0,3	19,5
40	0,5	39,2	40	0,5	39,3
80	1,1	78,8	80	1,3	78,7
120	1,6	117,9	120	1,7	118,2
160	2,3	156,8	160	2,1	157,5
I	I	III 3)	III	III	I 4)
20	4,2	23,2	20	− 3,2	15,9
40	8,4	46,2	40	− 6,8	31,2
80	18,0	91,6	80	−12,0	61,4
160,4	37,6	183,6	160,8	−22,0	122,0

$V_1{}^0$	V_1	V_2	$V_2{}^0$	V_2	V_1
I	I	IV 5)	IV	IV	I 6)
20	− 2,5	16,5	20	3,0	22,3
40	− 4,9	33,3	40	6,6	44,7
80	− 9,1	66,3	80	13,1	89,3
120	−13,4	99,2	120	20,0	133,3
160	−17,2	132,0			
III	III	IV 7)	IV	IV	III 8)
20	− 6,0	13,0	20	6,9	26,0
40	−11,4	25,8	40	14,0	51,8
80,4	−20,8	50,4	80,2	29,6	99,6
160,8	−35,4	98,0	160,4	62,8	194,2

Stäbe von verschiedenem Querschnitt.

I	I	V 9)	V	V	I 10)
20	6,6	25,5	20	− 6,0	13,0
40	13,3	52,2	40	−12,0	26,1
80	26,6	104,2	80	−24,6	52,4
120	39,6	156,4	160	−48,8	106,0
IV	IV	V 11)	V	V	IV 12)
20	9,0	27,8	20	− 8,2	10,5
40	18,4	55,7	40	−15,9	21,2
80	37,6	110,1	80	−30,8	41,8
120	57,7	163,6	160	−60,2	83,5

Um die in diesen Tafeln enthaltenen Zahlenwerthe mit der Theorie vergleichbar zu machen, sind sie noch von Fehlern zu befreien. Der Luftwiderstand ist bei so kleinen Amplituden zwar fast unmerklich; es beträgt nämlich die Abnahme der Amplituden pro Doppelschwingung bei 160 mm Ausschlag:

für die Stäbe I und II 0,6 mm
für „ „ III 0,7 mm
für „ „ IV 0,5 mm
und für „ „ V 1,1 mm,

es fällt also der Einfluss während einer einfachen Schwingung beinahe in die Grenze der Beobachtungsfehler[1]) — aber eine andere Wirkung der umgebenden Luft ist merklicher.

1) Eine Correction ist deshalb nur näherungsweise angebracht.

Während der Einleitung des Stosses entsteht zwischen den Stäben eine Verdichtung der Luft, während ihrer Trennung eine Verdünnung. Beide Umstände wirken in entgegengesetzter Weise auf das System ein, aber wahrscheinlich nicht mit gleicher Stärke. Ich glaube annehmen zu müssen, dass die Verdünnung eine energischere ist, als die vorhergehende Verdichtung, und sehe die in den beiden ersten Tafeln ausgesprochene Erscheinung, dass bei zwei gleichen Stäben entgegen der Erwartung der stossende nicht nach dem Stoss in Ruhe verharrt, sondern dem gestossenen noch ein wenig folgt, als eine Wirkung dieser Ursache an. Demgemäss corrigire ich zunächst die Beobachtungen der ersten beiden Tafeln dadurch, dass ich die kleine im stossenden Stab übrige Geschwindigkeit dem gestossenen noch zulege, und danach die der übrigen (indem ich berücksichtige, dass die besprochene Ursache nur von der relativen Geschwindigkeit der beiden Stäbe abhängen kann und indirect proportional ihren Massen auf sie wirken muss) dadurch, dass ich bei jeder Beobachtung den aus der ersten oder zweiten Tafel für die relative Geschwindigkeit der betreffenden beiden Stäbe passenden Werth entnehme und denselben, mit dem umgekehrten Verhältniss der Massen multiplicirt, von der Endgeschwindigkeit des stossenden Stabes abziehe, zu der des gestossenen zufüge. Z. B. ist in der dritten Beobachtung der fünften Tafel die relative Geschwindigkeit nahe dieselbe wie in der dritten, der ersten und zweiten Tafel. Ich bilde daher den corrigirten Werth:

$$v_1 = -9{,}1 - 1{,}2 = -10{,}3, \qquad \text{aber:}$$

$$v_2 = 66{,}3 + 1{,}2 \cdot \frac{\mathfrak{m}_I}{\mathfrak{m}_{IV}}, \quad \text{d. i., da } \frac{\mathfrak{m}_I}{\mathfrak{m}_{IV}} = \tfrac{3}{4} \text{ ist,} \qquad v_2 = 67{,}2.$$

Zu letzterem Werth würde wegen des Luftwiderstandes noch beinahe 0,2 hinzukommen.

Das Gleiche habe ich bei den Beobachtungen der neunten bis zwölften Tafel gethan in der Annahme, dass wegen der schwachen Abrundung der Enden der Stäbe ihr Querschnitt auf die genannte Erscheinung nur geringen Einfluss üben möchte; indess scheint es (vergl. p. 62), dass die so gebildete Correction etwas zu gross ausfällt.

Stellt man nach diesen Reductionen die beobachteten Werthe mit den nach der Neumann-Saint Venant'schen Formel berechneten zusammen, so erhält man folgende Uebersicht.

Tabelle II.

Stäbe von gleichem Querschnitt.

beobachtet		berechnet		beobachtet		berechnet	
V_1	V_2	V_1	V_2	V_2	V_1	V_2	V_1
	$\frac{\mathfrak{m}_1}{\mathfrak{m}_2} = 1$		1)		$\frac{\mathfrak{m}_2}{\mathfrak{m}_1} = 1$		2)
0	20,0	0	20,0	0	19,8	0	20,0
0	39,7	0	40,0	0	39,8	0	40,0
0	80,1	0	80,0	0	80,1	0	80,0
0	119,7	0	120,0	0	120,1	0	120,0
0	159,5	0	160,0	0	160,0	0	160,0
	$\frac{\mathfrak{m}_1}{\mathfrak{m}_2} = \frac{3}{2}$		3)		$\frac{\mathfrak{m}_2}{\mathfrak{m}_1} = \frac{2}{3}$		4)
3,9	23,5	6,7	20,0	− 3,6	16,2	0	13,3
7,9	47,0	13,3	40,0	− 7,6	31,7	0	26,7
16,8	93,5	26,7	80,0	−13,9	62,9	0	53,3
35,3	187,4	53,3	160,4	−25,5	124,0	0	106,7
	$\frac{\mathfrak{m}_1}{\mathfrak{m}_2} = \frac{3}{4}$		5)		$\frac{\mathfrak{m}_2}{\mathfrak{m}_1} = \frac{4}{3}$		6)
− 2,8	16,7	0	15	2,8	22,6	5	20
− 5,4	33,7	0	30	6,2	45,2	10	40
−10,3	67,4	0	60	12,2	90,5	20	80
−15,1	100,6	0	90	18,8	135,1	30	120
−19,5	134,1	0	120				
	$\frac{\mathfrak{m}_1}{\mathfrak{m}_2} = \frac{1}{2}$		7)		$\frac{\mathfrak{m}_2}{\mathfrak{m}_1} = 2$		8)
− 6,4	13,2	0	10	6,7	26,4	10	20
−12,2	26,2	0	20	13,6	52,6	20	40
−21,6	51,4	0	40,2	28,7	101,5	40,1	80,2
−38,7	99,0	0	80,4	61,0	197,7	80,2	160,4

Stäbe von verschiedenem Querschnitt.

	$\frac{\mathfrak{m}_1}{\mathfrak{m}_2} = 1{,}96$		9)		$\frac{\mathfrak{m}_2}{\mathfrak{m}_1} = 0{,}51$		10)
6,3	26,1	6,5	26,5	− 6,6	13,3	− 6,5	13,5
12,8	53,2	13,0	53,0	−13,8	26,6	−13,0	27,0
25,4	106,7	26,0	106,0	−27,0	53,8	−26,0	54,0
38,0	160,1	39,1	159,1	−51,8	108,0	−52,1	108,0
	$\frac{\mathfrak{m}_1}{\mathfrak{m}_2} = 0{,}38$		11)		$\frac{\mathfrak{m}_2}{\mathfrak{m}_1} = 2{,}63$		12)
8,8	28,4	9,9	13,5	− 8,8	10,7	− 6,5	10,1
18,0	56,7	19,8	26,9	−16,9	21,6	−13,1	20,2
36,8	112,6	40,7	53,8	−33,3	42,7	−26,2	40,3
56,1	167,0	60,5	80,7	−63,6	85,3	−52,3	80,6

Die vorstehende Zusammenstellung zeigt ausser in den Tafeln 1, 2, 9 und 10, von denen später gesprochen werden wird, durchweg ausserordentliche Differenzen zwischen Theorie und Beobachtung. Besonders auffällig ist, dass, während bei Stäben gleichen Querschnitts die Theorie, wenn der kürzere stösst, nach dem Stosse für denselben Ruhe verlangt, die Beobachtung consequent ein lebhaftes Zurückspringen ergibt (vgl. Tafel 4, 5 und 7); ferner, dass sich ganz allgemein die nach dem Stoss übrige lebendige Kraft der fortschreitenden Bewegung sehr erheblich grösser findet, als sie die Theorie ergibt, und beide Umstände sprechen dagegen, dass Fehlerquellen die Ursachen der Abweichungen sind. — Bestätigt erscheint vollständig das allgemeine Gesetz von der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes. Aber mit den Neumann-Saint Venant'schen Stossformeln sind diese Beobachtungen unvereinbar.

Hier ist nun der Ort, der Beobachtungen, die Hr. Boltzmann[1]) veranlasst und publicirt hat, zu gedenken. Sie betreffen nur den speciellen Fall zweier Stäbe von nahe gleicher Masse und gleichem oder verschiedenem Querschnitt, aber ich trage Bedenken, ihnen entscheidende Bedeutung beizulegen. Einmal sind nämlich die Querdimensionen so gross gegen die Längsdimensionen (bei den dickeren ist das Verhältniss 17 : 100), dass man kaum die Theorie, welche die Querdimensionen verschwindend klein voraussetzt, auf sie anwenden kann, und zweitens sind die mitgetheilten Beobachtungen noch nicht von dem Einfluss der oben erörterten Fehlerquellen befreit, der bei den sehr leichten Stäben (aus grauem Kautschuk gefertigt) ausserordentlich gross gewesen sein muss; wenigstens ergab die Beobachtung mit gleichen Stäben den Ausschlag des gestossenen Stabes, resp. = 83,5, 42 und 26 mm, wo nach der Theorie (die in diesem Falle sich bei meinen Versuchen vollständig bewährt hat, ja wie man weiter sehen wird, sich bewähren musste) resp. 100, 50 und 30 mm zu erwarten gewesen wäre.

Trotz alledem geben die Boltzmann'schen Beobach-

1) L. Boltzmann, l. c. p. 1227.

tungen durch ihre Abweichungen von den theoretischen Zahlenwerthen Grund zu schwerem Zweifel gegen die Richtigkeit der Theorie, eventuell ihre Anwendbarkeit auf die unter den gewöhnlichen Umständen angestellten Beobachtungen.

II. Den Grund für die Abweichung der Resultate der Beobachtung und der Neumann-Saint Venant'schen Formeln sehe ich in den letzteren zu Grunde liegenden Bedingungen an der Berührungsstelle beider Stäbe. Diese scheinen mir nicht nur im allgemeinen mit der Wirklichkeit, sondern auch unter sich im Widerspruch zu stehen. Sind die beiderseitigen Grenzelemente während der Berührung in solcher Lage und solchem Zustande, dass sie aufeinander wirken wie Nachbarelemente im Inneren eines einzigen Stabes, so können sie nicht durch eine beliebig kleine Dilatation getrennt werden (da dies von jenen keineswegs gilt), und zeigt umgekehrt die Beobachtung kein merkliches Aneinanderhaften, so können die beiderseitigen Grenzelemente nicht aufeinander wirken wie Theile eines ungetrennten Ganzen. Denn nach den Vorstellungen der Elasticitätstheorie ist mit gleicher relativer Lage zweier Körpermassen die gleiche Wirkung untrennbar verbunden, und es würde aus der zuerst von Poisson ausgesprochenen Annahme, dass von dem Moment der Berührung an die Stäbe als Theile eines einzigen elastischen Körpers angesehen werden können, folgen, dass sie sich niemals trennen, es sei denn, dass die durch den Stoss als Reaction erregte Dilatation gross genug wäre, die Cohäsion des einen Stabes zu überwinden, in welchem Falle das System aber nicht gerade an der ursprünglichen Grenzstelle, sondern z. B. bei gleicher Substanz und Dicke beider Stäbe an der Stelle zerreissen würde, wo die Dilatation zuerst auftritt.

Auf Grund dieser Betrachtungen habe ich mir über den Vorgang in der Grenze der stossenden Körper folgende Vorstellung gebildet.

Tritt die Erscheinung, die wir als Stoss bezeichnen, auf, so folgt daraus, dass die Stäbe während der „Berührung“ nicht in so inniger Verbindung sind, dass sie als ein Ganzes anzusehen wären. Verschiedene Umstände werden dem entgegenwirken. Zunächst die meist vorhandene Krümmung der stossenden Endflächen[1]), ferner geringe Unebenheiten, die auch bei der vollkommensten Politur nicht fehlen, ebenso die auf der Oberfläche condensirten Gasschichten[2]), endlich vielleicht der Zustand der Oberflächenschichten der Körper selbst, der aller Wahrscheinlichkeit nach von dem der inneren Theile abweicht. In allen diesen Fällen hat ein Element, welches durch zwei, der Berührungsstellen beiderseitig sehr nahe liegende Querschnitte begrenzt wird und welches ich kurz die „Zwischenschicht" nennen will, wesentlich andere Eigenschaften als ein gleich starkes im Inneren eines der Stäbe. Werden die zwei Stäbe mit unendlich kleiner Kraft zusammengedrückt, so hat die Zwischenschicht eine gewisse Dicke, welche die natürliche heissen mag. Eine Vergrösserung des Druckes verringert die Dicke, aber nach der Natur der Zwischenschicht ist die Compression jedenfalls nicht proportional dem Druck, sondern wächst bei gleichmässiger Zunahme desselben anfangs sehr schnell, allmählich langsamer. Einem Zug setzt die Zwischenschicht gar keinen Widerstand entgegen.

Hieraus folgt, dass die Bedingungen in der Grenze zwischen den Stäben sein werden, falls $(Z_z)_1$ und $(Z_z)_2$ die Druckkräfte im ersten und zweiten Stab und w_1, w_2 die Verschiebungen in der Längsrichtung (welche in die z-Axe fallen mag) bezeichnen:

1) Auf den Einfluss der nie ganz fehlenden Krümmung der stossenden Flächen macht auch Hr. Boltzmann (l. c. p. 1225) aufmerksam und fügt hinzu: „dass daher bei gleich langen ebensowenig als bei ungleich langen Stäben die reflectirten Wellen sich wieder am Ausgangspunkte concentriren. Hiernach würde also der bedeutende Verlust von lebendiger Kraft beim Stosse nicht blos der elastischen Nachwirkung zuzuschreiben sein u. s. w." Aber dies letztere scheint mir angesichts des Resultates, dass die bei Stäben mit gekrümmten Endflächen erhaltenen Verluste an lebendiger Kraft durchweg viel geringer als nach der Neumann-Saint-Venant'schen Theorie, ja bei gleichen Stäben völlig verschwindend sind, nicht aufrecht zu erhalten. Hr. Prof. Boltzmann hat bei einer zweiten Veröffentlichung seiner Beobachtungen diesen Einwand gänzlich ignorirt. (Vgl. Wied. Ann. **17**. p. 343. 1882.)

2) Vgl. Voigt, Wied. Ann. **19**. p. 39. 1883.

$$(\overline{Z}_z)_1 = (\overline{Z}_z)_2 \quad \text{und} \quad \overline{w}_1 - \overline{w}_2 = F(\overline{Z}_z).$$

Hierin bezeichnet $F(\overline{Z}_z)$ die Grösse der Compression der Zwischenschicht, ist also eine Function, die für kleine Z_z sehr schnell, für grössere langsamer zunimmt.

Diese Bedingungen würden gelten, so lange an der Berührungsstelle eine Druckkraft wirkt; verwandelt sich diese in eine Zugkraft, so sind die Stäbe ohne Wirkung aufeinander und gilt also beiderseitig $(\overline{Z}_z)_1 = 0$ und $(\overline{Z}_z)_2 = 0$.

Mit einer unbekannten Function F lässt sich selbstverständlich das Problem nicht der Rechnung unterwerfen, und auch für die meisten einfachen und plausiblen speciellen Annahmen reichen die Mittel der Analysis nicht aus. Ich will daher folgendes angenäherte Verfahren benutzen. Bei einem bestimmten Stoss wird die Zwischenschicht um eine bestimmte Grösse zusammengepresst; das Verhältniss der Compression δl zur ganzen Dicke der Zwischenschicht l und der diese Compression pro Flächeneinheit erzeugenden Druckkraft p, nämlich $\delta l / p l$ kann als der reciproke mittlere Elasticitätscoëfficient e der Zwischenschicht bei diesem Stosse bezeichnet werden. Ich werde so rechnen, als wenn die Zwischenschicht in allen Perioden des Stosses denselben Elasticitätscoëfficienten e besässe. Dann ist aber zu bemerken, dass dieser Elasticitätscoëfficient keine durch die Natur der Stäbe allein gegebene Constante, sondern noch von der Stärke des Stosses abhängig ist, und zwar mit dieser wächst und abnimmt.

Lege ich, wie gesagt, die Z-Axe in die Mittellinie der stossenden Stäbe von ihrer Berührungsstelle aus, bezeichne mit w_1, w_2, E_1, E_2, ε_1, ε_2, $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$, q_1, q_2, l_1, l_2 für den ersten und zweiten Stab Verrückungen, Elasticitätscoëfficienten, Dichtigkeiten, Massen, Querschnitte und Längen, setze endlich abgekürzt:

$$\frac{E_1}{\varepsilon_1} = a_1{}^2, \quad \frac{E_2}{\varepsilon_2} = a_2{}^2, \quad E_1 q_1 = b_1, \quad E_2 q_2 = b_2,$$

und $eq/l = c$, worin l, q, e für die Zwischenschicht Dicke, Querschnitt und mittleren Elasticitätscoëfficienten bezeichnen, so ist das Problem in folgenden Gleichungen ausgesprochen.

Es muss sein:

$$\text{für} \quad -l_1 < z < 0, \qquad \text{für} \quad 0 < z < l_2,$$

(1) $$\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} = a_1^2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2}, \qquad \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} = a_2^2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial z^2},$$

(2) $$\text{für } z = -l_1, \quad \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0, \qquad \text{für } z = l_2, \quad \frac{\partial w_2}{\partial z} = 0,$$

für $z = 0$[1].

(3) $$b_1 \frac{\partial w_1}{\partial z} = b_2 \frac{\partial w_2}{\partial z} = c\,(w_2 - w_1),$$

endlich für $t = 0$

(4) $$w_1 = 0, \qquad w_2 = 0.$$[2]

(5) $$\frac{\partial w_1}{\partial t} = V_1^0, \qquad \frac{\partial w_2}{\partial t} = V_2^0.$$

Das Problem zu lösen, setze ich:

$$w_1 = \Sigma A_1 \sin a_1 t p_1 \cos p_1 (l_1 + z) + B_1 t,$$
$$w_2 = \Sigma A_2 \sin a_2 t p_2 \cos p_2 (l_2 - z) + B_2 t,$$

wodurch sogleich die Bedingungen (1), (2) und (4) erfüllt sind.

Aus (3) folgt $a_1 p_1 = a_2 p_2$:

$$b_1 p_1 A_1 \sin p_1 l_1 + b_2 p_2 A_2 \sin p_2 l_2 = 0 \text{ und:}$$

$$c\left(\frac{1}{b_1 p_1} \operatorname{ctg} p_1 l_1 + \frac{1}{b_2 p_2} \operatorname{ctg} p_2 l_2\right) = 1,$$

endlich $B_1 = B_2 = B$.

Setze ich $a_1 p_1 = a_2 p_2 = \nu$:

$$b_1 p_2 A_1 \sin p_1 l_1 = -b_2 p_2 A_2 \sin p_2 l_2 = A,$$

so kommt: $$w_1 = \sum \frac{a_1 A_h \sin \nu_h t \cos \frac{\nu_h}{a_1}(l_1 + z)}{b_1 \nu_h \sin \frac{\nu_h l_1}{a_1}},$$

$$w_2 = -\sum \frac{a_2 A_h \sin \nu_h t \cos \frac{\nu_h}{a_2}(l_2 - z)}{b_2 \nu_h \sin \frac{\nu_h l_2}{a_2}},$$

---

1) Neben den Dimensionen der Stäbe ist die Dicke der Zwischenschicht zu vernachlässigen.

2) Die Annahme einer anfänglichen Dilatation hat wohl kaum Interesse.