

R. FRISCHBIER

**Zur Lösung des Körperstoßproblems**

*In der vorliegenden Arbeit wird das bisher ungelöste Problem des Körperstoßes dadurch einer Lösung zugeführt, daß in ihr die Impulserhaltung im Sinne von Descartes begründet wird. Die entwickelten Stoßansätze werden auf den Zentralstoß eines freien gegen einen gleichen festen Stab aus elastischem homogenen Material angewandt. Dieses Problem wird einer geschlossenen Lösung zugeführt. Sie wird mit den spannungsoptischen Druckaufzeichnungen von Schwieger verglichen und damit in guter Übereinstimmung befunden.*

*In the present paper the up to now unsolved problem of collision between bodies has been brought to a solution by explaining the conservation of impulse in the sense of Descartes. The equations for pushes developed are applied to the central collisions from a rod of elastic homogeneous material towards a rigid rod of the same material. This problem is brought to closed solution. It is compared with the photoelastic registrations by Schwieger and found to be in good agreement.*

В этой работе впервые решается задача удара тел при сохранении импульса в Декартовом смысле. Применяется развитый в данной работе подход к решению проблемы центрального удара свободного стержня по стержню той же прочности из упругого однородного материала. Получено замкнутое решение этой проблемы. Сравнение решения с эластооптическими исследованиями в работе Шви́гера дело хорошее соответствие.

In seinem Lehrbuch [1] zur technischen Mechanik betont I. SZABÓ:

„Der Ablauf des Stoßvorganges, insbesondere der zeitliche Verlauf der Stoßkraft, ist in allen Einzelheiten bis heute noch nicht geklärt, wenngleich man sich für den Stoß schon sehr früh zu interessieren begann; man bedenke, daß das ‚Schlagen‘ mit Hammer, Axt, Rammbock usw. zu den primitivsten Tätigkeiten menschlichen Handwerks gehört“.

Der Stoß ist ein Grundphänomen der Bewegung der Körper. Wenn zu diesem festgestellt werden muß, daß er in allen seinen Einzelheiten bis heute nicht geklärt ist, so kann darin Grundsätzliches nicht in Ordnung sein. Was das ist, dem soll in dieser Arbeit nachgegangen werden.

**1. Die allgemeinen Stoßgleichungen zum Zentralstoß**

Zur Klärung dessen, was in der bisherigen Beschreibung des Stoßvorgangs nicht in Ordnung ist, betrachten wir als einfachsten Fall den geradlinigen Zentralstoß zweier Körper.

Es bezeichnen in Richtung der Zentrallinie  $G_i$  ( $i = 1, 2$ ) die Bewegungsgrößen der Körper und  $K_{ij}$  die Stoßkräfte, die senkrecht zur Stoßfläche ins Innere vom  $i$ -ten Körper wirken. Dann gelten die Stoßgleichungen

$$\dot{G}_i = K_{ij}, \quad i \neq j = 1, 2 \quad (1)$$

unter der Wechselwirkungsbedingung

$$K_{12} = -K_{21}. \quad (2)$$

Außer diesen überlegt man sich das Bestehen zusätzlicher Äquivalenzen.

An stoßenden Körpern hat man nicht nur eine Bewegung  $G_i$  auf die Stoßfläche zu, sondern vielmehr auch eine von dieser weg, nämlich die der Stauchung, die sich von der Stoßfläche aus in die Körper ausbildet. Dieser  $G_i$  entgegengerichteten Bewegung ist gleichfalls eine resultierende Größe  $-W_i$  zuzuschreiben. Wie der Änderung von  $G_i$  muß aber auch der von  $-W_i$  das Gleichgewicht durch die Flächenkraft  $K_{ij}$ ,

$$- \dot{W}_i = K_{ij}, \quad (3)$$

gehalten werden.

Ist  $t = 0$  der Berührungszeitpunkt der Körper, so muß

$$W_i(0) = 0 \quad (4)$$

sein; denn von diesem Augenblick an beginnt sich die Stauchung an den Körpern erst auszubilden. Darum muß sich der Impuls der Stauchung oder kurz „Stoßimpuls“ zu einem Stoßzeitpunkt  $t > 0$  zu

$$- W_i(t) = \int_0^t K_{ij}(t) dt \quad (5)$$

bestimmen. Beachtet man die Wechselwirkungsbedingung (2), so folgt die wechselseitige Gleichheit der Stoßimpulse,

$$- W_1(t) = W_2(t). \quad (6)$$

Die Aufgabe der Mechanik deformierbarer Körper ist es, Stoßimpulse  $W_i(t)$  wie Stoßkräfte  $K_{ij}(t)$  aus der Stauchungs- bzw. Stoßwellenbewegung an den Körpern zu ermitteln. Sie zwingt zur Einbeziehung ihrer Gestalts- und Materialeigenschaften.

Eliminiert man aus (1) und (3) die Stoßkräfte, so geht daraus die Äquivalenz resultierender Bewegungsänderung

$$\dot{G}_i = - \dot{W}_i \quad (7)$$

hervor. Sie besagt, daß die Änderung der Bewegungsgröße des stoßenden Körpers gleich seiner Stoßimpulsänderung ist.

## 2. Die Kartesische Impulserhaltung

Integriert man die Äquivalenzen (7) über den Stoßabschnitt  $t = 0$  bis  $t > 0$ , so folgen unter Beachtung von (4) die Impulserhaltungen

$$G_i(t) + W_i(t) = G_i(0). \quad (8)$$

Sie besagen, daß die anfängliche Bewegungsgröße  $G_i(0)$  der Körper beim Stoß erhalten bleibt. Bezüglich der Größenfestsetzung von  $G_i(0)$  überlegt man sich folgendes:

Beim Stoß kann keine Größe objektiv erhalten bleiben, die sich subjektiv nach Belieben durch den Wechsel des relativen Bezugsraumes abändern läßt. Die Objektivität im Stoßgeschehen besteht in dessen ausschließlicher Wechselseitigkeit. Diese folgt aus den unterstellten Gleichungen nur so, daß man die anfängliche Bewegungsgröße im System wechselseitig gleich auf den Körper verteilt,

$$G_1(0) = -G_2(0). \quad (9)$$

Das ist diejenige Verteilung der Bewegungsgröße auf die Körper, bei der einer dem anderen im Raum objektiv zu widerstehen vermag. Mit (9) ergibt sich unter Beachtung von (6)

$$G_1(t) = -G_2(t). \quad (10)$$

Damit ist in der Tat der wechselseitigen Gleichheit aller resultierenden Größen beim Stoß Rechnung getragen.

Da DESCARTES derjenige war, der die Erhaltung anfänglicher Bewegungsgröße beim Stoß behauptet hat, sollen (8) die Kartesischen Impulserhaltungen genannt werden.

Die Verteilungen (10) sind die nach dem Massenmittelpunktssystem

$$G_1(t) = \mu v_{12}(t) = -\mu v_{21}(t) = -G_2(t); \quad (11)$$

dabei bedeuten  $m_i$  die Massen der Körper,  $\mu$  die reduzierte Masse des Systems,

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad (12)$$

und  $v_{12}(t)$  die Relativgeschwindigkeit der Körper gegeneinander. Geht man mit (11) in die Kartesischen Impulserhaltungen (8) hinein, so lassen diese sich in der Form

$$\mu v_{ij}(t) + W_i(t) = \mu v_{ij}(0) \quad (13)$$

schreiben. Hiernach ist bei Kenntnis der Stoßimpulswerte  $-W_1(t) = W_2(t)$  die Relativgeschwindigkeit  $v_{12}(t)$  aus der zu Stoßbeginn,  $v_{12}(0)$ , bestimmt.

Es seien jetzt  $v_i(t)$  die Geschwindigkeiten der Körper relativ zu einem Bezugsraum, der gegen das Massenmittelpunktssystem der stoßenden Körper die Translationsgeschwindigkeit  $a(t)$  besitzt. Dann besteht mit der Festlegung

$$v_{12}(t) = v_1(t) - v_2(t) = -v_{21}(t) \quad (14)$$

der phoronomische Zusammenhang

$$\mu v_{ij}(t) = m_i \{v_i(t) - a(t)\}. \quad (15)$$

Unter diesem lassen sich die Relationen (13) dann in der Gestalt

$$m_i \{v_i(t) - a(t)\} + W_i(t) = m_i \{v_i(0) - a(0)\} \quad (16)$$

darstellen. Verlangt man für die  $v_i(t)$  die analoge Beziehung

$$m_i v_i(t) + W_i(t) = m_i v_i(0) \quad (17)$$

wie für die  $v_{ij}(t)$  in (13), so führt das auf die Bedingung

$$a(t) = a(0) \quad \text{bzw.} \quad m_1 v_1(t) + m_2 v_2(t) = m_1 v_1(0) + m_2 v_2(0), \quad (18)$$

welche besagt, daß sich der Bezugsraum der  $v_i(t)$  relativ zum Massenmittelpunktssystem mit konstanter Relativgeschwindigkeit (18) bewegen muß. Dann lassen sich die Impulserhaltungen (16) beiderseitig um Größen  $m_i a(t) = m_i a(0)$  vermindern, die sich subjektiv nach Belieben durch den Wechsel des relativen Bezugsraumes abändern lassen. Die Folgen (17) solcher Verminderung sind bezugsraumabhängige Relationen. Als solche können sie nicht im Sinne ihres Anscheins ausgelegt werden, wonach beim Stoß die bezugsraumabhängigen Größen  $m_i v_i(0)$  erhalten bleiben sollten. Die Relationen (17) sind nur unter der Bedingung (18) richtig, die lediglich das Bewegungsverhältnis zweier relativer Räume, nicht aber das wechselseitige Stoßverhältnis der Körper enthalten. Insofern sagt die Bedingung (18) auch nichts über den eigentlichen Stoßvorgang aus. Demgegenüber enthalten die Kartesischen Impulserhaltungen (8) eine allgemeine Beschreibung des Stoßvorganges, da sie der objektiv wechselseitigen Einwirkung der Körper beim Stoß Rechnung tragen.

## 3. Die Beschreibung des Zentralstoßes mit der Kartesischen Impulserhaltung

Nach Maßgabe der Kartesischen Impulserhaltung (8) müssen in dem Maße, wie vom Berührungzeitpunkt  $t = 0$  an die Stoßimpulse  $W_i(t)$  anwachsen, im gleichen Maße die Bewegungsgrößen  $G_i(t)$  abnehmen. Diese Abnahme geschieht bis zu dem Augenblick  $t = t_k$ , zu dem die Stoßimpulse auf den Wert

$$W_1(t_k) = G_1(0) = -G_2(0) = -W_2(t_k) \quad (19)$$

angewachsen bzw. die Bewegungsgrößen Null geworden sind,

$$G_1(t_k) = -G_2(t_k) = 0. \quad (20)$$

Die Äquivalenzen (19) stellen die Bedingungen dar, welche die Stauchung an den Körpern normieren. Dieser Normierung zufolge müssen alle Stoßgrößen Proportionalität zur anfänglichen Relativgeschwindigkeit der Körper gegeneinander und damit zu einer Größe zeigen, die invariant gegenüber jedem Wechsel eines Bezugsraumes zu einem anderen ist. Man erreicht somit für den Körperstoß die Unabhängigkeit von der Wahl des Bezugsraumes dadurch, daß man die resultierenden Stoßgrößen auf objektiv wechselseitige Wirkungen an den Körpern zurückführt.

Den Stoßabschnitt

$$0 < t < t_k \quad (21)$$

des Anwachsens der Stoßkräfte vom Wert

$$K_{12}(0) = -K_{21}(0) = 0 \quad (22)$$

bis auf den maximalen Wert

$$|K_{12}(t_k)| = |K_{21}(t_k)| = \text{Max} \quad (23)$$

bezeichnet man als Kompressionsphase.

Der Zeitpunkt  $t_k$  des Kompressionsendes ist zugleich der Beginn der Restitution. Bei dieser geht zufolge der Abnahme der Stoßkräfte  $K_{ij}(t)$  die Stauchung an den Körpern zurück. Gleichzeitig wachsen aber nach (5) die Stoßimpulse über den Wert (19) hinaus an. Wegen der Impulserhaltung (8) muß dann in dem Maße, wie  $W_i(t)$  über den Wert  $G_i(0)$  hinauswächst, die Bewegungsgröße  $G_i(t)$  wieder um einen Anteil anwachsen, der zur anfänglichen Bewegungsgröße  $G_i(0)$  entgegengesetzt ist. Der Stoß ist in dem Zeitpunkt  $t = t_e$  beendet, in dem die Stoßkräfte verschwinden,

$$K_{12}(t_e) = -K_{21}(t_e) = 0. \quad (24)$$

Dann sind nach (1) und (3) die notwendigen Bedingungen

$$\dot{G}_i(t_e) = -\dot{W}_i(t_e) = 0 \quad (25)$$

für die Konstanz der Bewegungsgrößen und Stoßimpulse in der Nachstoßphase erfüllt. Den Stoßabschnitt

$$t_k < t < t_e \quad (26)$$

des Abnehmens der Stoßkräfte vom maximalen Wert (23) bis auf den verschwindenden Wert (24) nennt man die Restitutionsphase.

Definiert man unter Beachtung von (5) die Stoßzahl

$$R = \int_{t_k}^{t_e} K_{ij}(t) dt / \int_0^{t_k} K_{ij}(t) dt = W_i(t_e) / W_i(t_k) - 1, \quad (27)$$

so lassen unter Berücksichtigung von (19) die Kartesischen Impulserhaltungen (8) für das Stoßende die Darstellungen

$$G_i(t_e) = -RG_i(0) \quad (28)$$

zu. Aus ihnen erkennt man in

$$Q_i = (1 - R)G_i(0) = 2W_i(t_k) - W_i(t_e) \quad (29)$$

diejenigen Werte, um die die Bewegungsgrößen in der Nachstoßphase  $t > t_e$  von denen beim vollkommen elastischen Stoß mit der Bestimmung

$$R = 1 \quad (30)$$

abweichen. Folglich bedeuten die Impulsdifferenzen (29) dasjenige Kartesische Maß, um das sich der Deformationszustand der Körper beim Stoßende relativ von dem bei Stoßanfang unterscheidet. Nun können die Körper in der Restitutionsphase einen Impuls allenfalls in der Größe wieder abgeben, in der sie ihn in der vorangegangenen Kompressionsphase aufgenommen haben. Darum unterliegt die Stoßzahl (27) den Beschränkungen

$$0 \leq R \leq 1. \quad (31)$$

Die untere Schranke  $R = 0$  entspricht dem vollkommen unelastischen Stoß.

Setzt man in (28) die Bestimmungen (11) ein, so folgt die auf NEWTON zurückgehende Stoßhypothese

$$v_{12}(t_e) = -Rv_{12}(0). \quad (32)$$

Man nennt die Stoßzahl  $R$  darum auch den NEWTONSchen Restitutionskoeffizienten.

#### 4. Die deformatorischen Bestimmungen der Stoßimpulse und Stoßkräfte

Es seien  $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(0)$  die Lagen der Körperteile  $dV_i$  in den ungestauchten Körpern und  $\mathbf{r}_i(t)$  deren Lagen im körperfesten Bezugsraum der  $\mathbf{r}_i$  zum Stauchungsaugenblick  $t$ ; dann sind

$$\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_i(0) = \mathbf{w}_i(\mathbf{r}_i, t) \quad (33)$$

die momentanen Stauchungen an den Körpern. Aus ihnen bestimmen sich die Elemente der Stoßimpulse mit  $\rho_i$  als den Dichten zu

$$d\mathbf{W}_i = \rho_i \dot{\mathbf{w}}_i dV_i. \quad (34)$$

Sie ergeben zur Bestimmung für den gesamten Stoßimpuls das Integra

$$\mathbf{W}_i(t) = \int_{V_i} \rho_i \dot{\mathbf{w}}_i dV_i. \quad (35)$$

Es seien weiter

$$\sigma_i = \sigma_i(\mathbf{r}_i, t) \quad (36)$$

die Spannungsdyaaden zu den gestauchten Körpern und

$$\sigma_i \cdot \mathbf{n}_i \quad (37)$$

die Drücke auf die gerichteten Oberflächenelemente  $\mathbf{n}_i dF_i$  der momentanen Stoßflächen. Dann müssen die Stoßkräfte aus den Flächenintegralen

$$K_{ij}(t) = \int_{F_i} \sigma_i \cdot \mathbf{n}_i dF_i \quad (38)$$

bestimmbar sein.

Vermittels der integralen Bestimmungen (35) und (38) lassen sich die Änderungen der Stoßimpulse (3) in üblicher Weise auf Feldgleichungen deformierbarer Körper,

$$\rho_i \ddot{\mathbf{w}}_i = \nabla \cdot \sigma_i, \quad (39)$$

zurückführen.

### 5. Die Anfangsbedingungen der Stauchung und ihre Normierung

Setzt man in der Vorstoßphase  $t < 0$  die Körper als ungestaucht voraus, so unterstellt man, daß ihre Teile relativ zueinander in Ruhe sind. Also verlangt man das Bestehen der Ruhbedingungen

$$\mathbf{w}_i = \dot{\mathbf{w}}_i = \ddot{\mathbf{w}}_i = 0 \quad \text{für } t < 0. \quad (40)$$

Da der Berührungzeitpunkt zugleich Ende der Vor- wie Anfang der Stoßphase ist, stellen (40) die Anfangsbedingungen für die Stauchung an den Körpern dar. Man muß hier aber noch mehr verlangen.

Es breitet sich nämlich die Frontfläche der Stauchung mit endlicher Geschwindigkeit in die Körper aus. Darum müssen die Bedingungen (40) noch zu Zeiten  $t > 0$  für alle jene Körperteile  $V_i - \bar{V}_i$  bestehen, die von der Frontfläche der Stauchung noch nicht überlaufen sind. Sind demnach  $\bar{V}_i$  die zum Augenblick  $t > 0$  bereits gestauchten Körperteile, so muß die Bestimmung der Stoßimpulse in der Form

$$W_i(t) = \int_{\bar{V}_i} \rho_i \dot{\mathbf{w}}_i \cdot \mathbf{e} d\bar{V}_i$$

möglich sein. Während der Stauchung wirken die Elemente der Körper nicht gleichzeitig, sondern vielmehr nacheinander. Das ist bei den Bewegungsgrößen nicht der Fall. Hier wirken entsprechend der Formel

$$G_i(t) = m_i \left\{ \frac{\mu}{m_i} v_{ij}(t) \right\}$$

die Körper mit allen ihren Elementen gleichzeitig. Die Gesamtimpulsgröße stoßender Körper  $G_i(t) + W_i(t)$  setzt sich daher aus zwei grundsätzlich zu unterscheidenden Bewegungsformen zusammen.

Die bisher übliche Zusammensetzung war die der Bewegung starrer Körper nachgebildete, nämlich die der Überlagerung der Massenmittelpunktsbewegung mit der Bewegung der Körperelemente relativ zum Massenmittelpunkt. Diese Art der Zusammensetzung ist im Falle deformierbarer Körper nur richtig, wenn sich die Körper im eingeschwungenen, stationären Zustand mit der Bedingung

$$\int_{V_i} \rho_i \ddot{\mathbf{s}}_i dV_i = 0$$

befinden, in der  $\ddot{\mathbf{s}}_i$  die Beschleunigungen der Körperelemente relativ zum Massenmittelpunkt der Körper sind. Sie wird falsch, wenn die Körper wie beim Stoß im einschwingenden, nicht stationären Zustand  $\mathbf{W}_i \neq 0$  sind.

Trotz der Homogenität der Feldgleichungen (39) und ihrer Anfangsbedingungen (40) lassen sich die Stauchungen auf Grund der Inhomogenität der Impulsbedingung (19) als verschieden von Null bestimmen, denn danach müssen in Verbindung mit (35) die Stauchungen so normiert werden, daß zum Zeitpunkt des Kompressionsendes  $t_k$  Äquivalenz mit der anfänglichen Bewegungsgröße,

$$\int_{V_i} \rho_i \dot{\mathbf{w}}_i(\mathbf{r}_i, t_k) \cdot \mathbf{e} dV_i = -G_i(0), \quad (41)$$

besteht; dabei ist  $\mathbf{e}$  der Einheitsvektor der Zentralstoßlinie. Der Zeitpunkt  $t_k$  ist aus der Maximumforderung (23) zu bestimmen.

Zu den Anfangsbedingungen (40) ist hier noch eine grundsätzliche Anmerkung zu machen: Die Stauchungen sind der Definition nach deformatorische Verschiebungen der Elemente eines Körpers relativ gegeneinander und nicht Verlagerungen bezüglich eines äußeren relativen Raumes. Die Beurteilung der Stauchungen hat darum dyna-

misch in dem Maße zu erfolgen, als Flächenkräfte auf die Körperelemente einwirken, die sie zwingen, ihre relative Lage gegen ihre Nachbarelemente zu ändern. Beim Vordringen der Stoßwelle in die Körper ist ihren noch ungestauchten Elementen völlige relative Ruhe (40) und nur denjenigen Elementen Bewegung zuzuschreiben, die momentan gestaucht werden. Man kann die Bewegung hier nicht in einem beliebigen äußeren Bezugsraum beurteilen, gegen den auch den ungestauchten Teilen dem Scheine nach Bewegung zukäme. Darum ist es grundsätzlich falsch, wenn SAINT VENANT [2] und NEUMANN [3], [4], [5] zu Anfangsbedingungen der Deformationsbewegung an den Körpern diejenigen phoronomischen Geschwindigkeiten machen, die diese zu Stoßbeginn dem Scheine nach gegen den gewählten äußeren Bezugsraum haben.

### 6. Die Endbedingungen bei der Stoßbewegung

Die theoretische Behandlung des Stoßproblems wird zeigen, daß es selbst unter Einbeziehung der Spannungs-Dehnungs-Beziehungen noch nicht lösbar ist. Man ist gezwungen, sich nach weiteren Bestimmungen umzusehen. Solche findet man in den Bedingungen vom Stoßende.

Aus (25) folgen in Verbindung mit (35) die Bedingungen

$$\int_{V_i} \rho_i \ddot{w}_i(\mathbf{r}_i, t_e) \cdot \mathbf{e} dV_i = 0. \quad (42)$$

Beim Stoßende werden sich die Körper im allgemeinen aber nicht wieder im Deformationszustand vom Stoßbeginn befinden. Vielmehr werden im Falle elastischer Körper diese zu Schwingungen angeregt sein. Folglich darf man aus dem Verschwinden der Integrale (42) nicht auf das Verschwinden ihrer Integranden schließen. Bei nicht verschwindenden Integranden aber können die Integrale (42) den Wert Null nur dann annehmen, wenn es eine die Körper  $V_i$  in zwei Teile  $V'_i, V''_i$  mit  $V_i = V'_i + V''_i$  teilende Fläche  $F_i(\mathbf{r}'_i) = 0$  gibt, so daß auf dieser der jeweilige Integrand verschwindet,

$$\rho_i \ddot{w}_i(\mathbf{r}'_i, t_e) \cdot \mathbf{e} = 0, \quad (43)$$

und in den Teilgebieten  $V'_i$  und  $V''_i$  entgegengesetzte Werte hat. Man darf also aus (42) auf die Äquivalenzen

$$\int_{V'_i} \rho_i \ddot{w}_i(\mathbf{r}_i, t_e) \cdot \mathbf{e} dV'_i = - \int_{V''_i} \rho_i \ddot{w}_i(\mathbf{r}_i, t_e) \cdot \mathbf{e} dV''_i \quad (44)$$

schließen. Jetzt stellen diese aber die Größen der Impulsänderung der angeregten Schwingung dar, die an den Körpern durch den Stoß bewirkt worden sind. Unter dem Grundsatz der Wechselseitigkeit aller resultierenden Stoßwirkungen ist die Anregung einer Schwingung an den Körpern nur mit dem Bestehen der Äquivalenzen

$$\int_{V'_1} \rho_1 \ddot{w}_1(\mathbf{r}_1, t_e) \cdot \mathbf{e} dV'_1 = - \int_{V'_2} \rho_2 \ddot{w}_2(\mathbf{r}_2, t_e) \cdot \mathbf{e} dV'_2 \quad (45)$$

vereinbar, wo  $V'_i$  die Teile mit den Berührungspunkten der stoßenden Körper sind. Hiermit ist unvereinbar, daß bei Stoßende der eine Körper spannungsfrei, der andere dagegen spannungsbehaftet ist, wie das nach SAINT VENANT und NEUMANN der Fall sein sollte.

Bei Stoßende sind aber nicht allein die den  $\rho_i \ddot{w}_i \cdot \mathbf{e}$  nach (39) entsprechenden Äquivalenzen

$$W_i^{(0)}(\mathbf{r}_i, t_e) = \nabla \cdot \sigma_i(\mathbf{r}_i, t_e) \cdot \mathbf{e} \quad (46)$$

durch den Stoß bewirkte Feldgrößen. Vielmehr sind das alle diejenigen abgeleiteten Größen

$$W_i^{(m)}(\mathbf{r}_i, t_e) = \underbrace{\int dx_1 \dots \int dx_m}_{m\text{-fach}} W_i^{(0)}(\mathbf{r}_i, t_e), \quad (47)$$

die aus den Größen (46) durch fortgesetzte unbestimmte Integration nach der in die Zentralstoßlinie fallenden Koordinate  $x_i = \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{e}$  hervorgehen. Darum sind um der Wechselseitigkeit aller durch den Stoß bewirkten Feldgrößen (47) willen auch für sie die (45) entsprechenden Wechselseitigkeitsbedingungen

$$\int_{V'_1} W_1^{(m-1)}(\mathbf{r}_1, t_e) dV'_1 = - \int_{V'_2} W_2^{(m-1)}(\mathbf{r}_2, t_e) dV'_2, \quad m = 1, 2. \quad (48)$$

zu verlangen. Dabei entspricht der Fall  $m = 1$  der Forderung (45).

Um zu gewährleisten, daß bei Stoßende die Stoßzahl den größtmöglichen Wert im Rahmen der aufgestellten Bestimmungsgleichungen annimmt, muß man zu den bisher formulierten Stoßbestimmungen eine von einem Parameter abhängige Lösung suchen. Dabei darf und kann die Stoßzeit  $T$  als möglicher Parameter gewählt werden. Aus der Parameterlösung  $R(T)$  ist die wahre Stoßzeit  $T = t_e$  aus der Forderung

$$R(t_e) = \text{Max} \quad (49)$$

zu ermitteln. Wegen (49) ist gewährleistet, daß die Körper im Augenblick der Trennung ein Maximum an Bewegungsgröße (28) zurückerhalten, oder aber die Schwingungen an ihnen durch ein Minimum an Impulsgröße (29) angeregt sind.

Damit sind die Bedingungen aufgeführt, um zumindest den Zentralstoß schlanker elastischer Stäbe im Rahmen der linearen Elastizitätstheorie mit hinreichend bekannten Mitteln behandeln zu können. Bevor das getan wird, sollen die grundlegenden Erhaltungssätze beim Stoß formuliert werden.

### 7. Die grundlegenden Erhaltungssätze beim Stoß

Nach den Betrachtungen zur Behandlung des Zentralstoßes zweier Körper sollen jetzt die Grundgleichungen für den allgemeinen Stoßfall zweier Körper formuliert werden.

Zu diesem Zweck hat man über die Grundgrößen des Zentralstoßproblems

- |                        |                      |
|------------------------|----------------------|
| 1) die Bewegungsgrößen | $\mathbf{G}_i(t)$ ,  |
| 2) die Stoßimpulse     | $\mathbf{W}_i(t)$ ,  |
| 3) die Stoßkräfte      | $\mathbf{K}_{ij}(t)$ |

hinaus die Grundgrößen des Drehstoßproblems

- |                            |                      |
|----------------------------|----------------------|
| 4) die Drehbewegungsgrößen | $\mathbf{D}_i(t)$ ,  |
| 5) die Drehstoßimpulse     | $\mathbf{S}_i(t)$ ,  |
| 6) die Stoßmomente         | $\mathbf{M}_{ij}(t)$ |

cinzuführen. Dann sind die allgemeinen Stoßgleichungen durch die Änderungsgleichungen der resultierenden Bewegung

$$\text{a) } \dot{\mathbf{G}}_i = \mathbf{K}_{ij}, \quad \text{b) } \dot{\mathbf{D}}_i = \mathbf{M}_{ij} \quad (50)$$

und

$$\text{a) } -\dot{\mathbf{W}}_i = \mathbf{K}_{ij}, \quad \text{b) } -\dot{\mathbf{S}}_i = \mathbf{M}_{ij} \quad (51)$$

gegeben. Dabei fordert das Wechselwirkungsprinzip

$$\text{a) } \mathbf{K}_{12} = -\mathbf{K}_{21}, \quad \text{b) } \mathbf{M}_{12} = -\mathbf{M}_{21}. \quad (52)$$

Eliminiert man aus den Stoßgleichungen die Stoßkräfte bzw. Stoßmomente, so folgen die Äquivalenzen der resultierenden Bewegung

$$\text{a) } \dot{\mathbf{G}}_i = -\dot{\mathbf{W}}_i, \quad \text{b) } \dot{\mathbf{D}}_i = -\dot{\mathbf{S}}_i. \quad (53)$$

Integriert man diese über einen Stoßabschnitt, so folgen auf Grund der Anfangsbedingungen

$$\text{a) } \mathbf{W}_i(0) = \mathbf{0}, \quad \text{b) } \mathbf{S}_i(0) = \mathbf{0} \quad (54)$$

die Kartesischen Formen der Impuls- bzw. Drehimpulserhaltung

$$\text{a) } \mathbf{G}_i(t) + \mathbf{W}_i(t) = \mathbf{G}_i(0), \quad \text{b) } \mathbf{D}_i(t) + \mathbf{S}_i(t) = \mathbf{D}_i(0) \quad (55)$$

mit den Wechselseitigkeitsbedingungen

$$\text{a) } \mathbf{G}_1(t) = -\mathbf{G}_2(t), \quad \text{b) } \mathbf{W}_1(t) = -\mathbf{W}_2(t), \quad \text{c) } \mathbf{S}_1(t) = -\mathbf{S}_2(t). \quad (56)$$

Die Drehimpulserhaltungen (55 b) unterscheiden sich von den Impulserhaltungen (55 a) grundsätzlich dadurch, daß die anfänglichen Drehbewegungsgrößen dynamisch allgemein mit

$$\mathbf{D}_1(0) \neq -\mathbf{D}_2(0) \quad (57)$$

und nicht mechanisch wie die Bewegungsgrößen entsprechend (56 a) zu beurteilen sind.

Wie nämlich der Drehzahlmesser in Form des Zentrifugalregulators deutlich macht, muß die Drehbewegungsgröße aus der wechselseitigen Relativbewegung der Körperelemente gegeneinander heraus beurteilt werden. Für eine solche Relativbewegung ist es nicht einerlei, ob man den Raum relativ zum Körper oder aber den Körper mit der entgegengesetzten Bewegung relativ zum Raum dreht. Im ersteren Fall ist die Bewegung bloß phoronomisch, bei der die Körperelemente keine Relativbewegung gegeneinander erfahren. Einzig im zweiten Fall tritt eine wechselseitige Relativverschiebung der Körperelemente gegeneinander ein. Dadurch erweist sie sich als wirkliche und nicht bloß scheinbare Bewegung. Die Drehbewegung eines Körpers ist also dynamisch nach Maßgabe der Kräfte zu beurteilen, die bei dieser an den Körperelementen wirksam sind und deren Momente die Drehbewegung in Wahrheit bedingen. Die anfänglichen Drehbewegungsgrößen sind daher unabhängig voneinander nach den dynamischen Verhältnissen in ihnen festzusetzen, weshalb im allgemeinen auch (57) gelten wird.

Nach Maßgabe der Kartesischen Erhaltungen (55 a, b) sind die Dreh- bzw. Bewegungsgrößen bestimmt, wenn die Dreh- bzw. Stoßimpulse es sind. Diese können nur so bestimmt sein, daß man die Stoßgleichungen (51 a, b) auf Feldgleichungen für die Stauchungen zurückgeführt und sie aus diesen ermittelt hat. Sind Dreh- und Stoßimpulse aus diesen ermittelt, dann sind Dreh- und Bewegungsgrößen der Körper während des Stoßes und nach dem Stoß über die Kartesischen Erhaltungen (55 a, b) eindeutig bestimmt.

### 8. Der Kartesisch-Leibnizsche Erhaltungsstreit

Die Dreh- bzw. Stoßimpulse lassen sich aus den Kartesischen Erhaltungen (55 a, b) mittels der Wechselseitigkeitsbedingungen (56 b, c) herausheben. Die Folgen sind die bisher als Dreh- bzw. Impulserhaltung ausgegebenen Sätze

$$\text{a) } \mathbf{G}_1(t) + \mathbf{G}_2(t) = \mathbf{G}_1(0) + \mathbf{G}_2(0), \quad \text{b) } \mathbf{D}_1(t) + \mathbf{D}_2(t) = \mathbf{D}_1(0) + \mathbf{D}_2(0). \quad (58)$$

In Wahrheit bedeuten sie aber keine Erhaltung entsprechender Größe in der Zeit, sondern vielmehr nur die Bedingung wechselseitiger Gleichheit der Dreh- bzw. Stoßimpulse in jedem Augenblick des Stoßes.

Hätte man nichts als die Relationen (58 a, b), so verfügte man in ihnen über zwei vektorielle Bestimmungsgleichungen für die vier vektoriellen Stoßbekanntnen

$$\mathbf{G}_i(t), \quad \mathbf{D}_i(t) \quad i = 1, 2. \quad (59)$$

Also verlangte ihre vollständige Festlegung zwei weitere vektorielle Bestimmungsgleichungen. Diese können nicht nach der bloßen Möglichkeit ausgewählt werden, die Unbekannten mathematisch festzulegen, denn allein aus dieser Möglichkeit heraus ließe sich nicht die Notwendigkeit als Bedingung für die die Bewegung bestimmenden Größen (59) begründen. Die Erkenntnis, daß eine mathematisch mögliche Bestimmungsgleichung notwendig für die Größen (59) ist, vermag einzig daraus zu entspringen, daß man sie aus den Änderungsgleichungen (50a, b; 51a, b) ableitet; anderenfalls hieße das nämlich Bestimmungen in Rechnung zu stellen, die sich nicht als Änderung der Bewegung äußerten.

Die beim Stoß bewirkten Stauchungen sind dann nicht bestimmt, wenn man über die vektoriellen Bestimmungsgleichungen (58a, b) hinaus einen einzigen skalaren Satz Leibnizscher Erhaltung

$$T(t) + A(t) = T(0), \quad (60)$$

mit  $T$  als kinetischer Energie und  $A$  als innerer Energie des Systems, der stoßenden Körper hinzufügt. Dieser skalare Satz enthält an sich weder die Möglichkeit, sich auf die vektoriellen Feldgleichungen (39) zu reduzieren, noch die Möglichkeit, die vektoriellen Größen der Stauchung aus ihm heraus normieren zu lassen. Folglich ist von diesem Leibnizschen Standpunkt aus keine Bestimmung des physikalischen Grundphänomens der Körperstöße möglich.

Die Kartesischen Erhaltungssätze (55a, b) bestimmen unter den genannten Voraussetzungen alle unbekanntes Stoßgrößen (59) vollständig. Darum wäre es ein Widerspruch, wenn es über sie hinaus eine zusätzliche, von ihnen unabhängige, Erhaltungsgröße (60) gäbe. Der Widerspruch läge aber nur dann vor, wenn sich die Leibnizsche Erhaltung (60) aus den Stoßgleichungen (50a, b; 51a, b) ableitete. Das aber ist nicht der Fall.

Indem der dargelegte Kartesische Standpunkt mit seinen vektoriellen Erhaltungen (55a, b) das anstehende Stoßproblem vollständig bestimmt, der Leibnizsche Standpunkt mit seinen Gleichungen (58a, b) und (60) dieses dagegen prinzipiell unbestimmt läßt, ist allein der Kartesische der mögliche und darüberhinaus notwendige Standpunkt.

### Anwendungsbeispiel: Der Zentralstoß eines freien gegen einen gleichen festen Stab

#### 1. Problemstellung

Als Anwendung zu den entwickelten Stoßansätzen soll hier der einfachste Fall geradlinigen Zentralstoßes, der schlanker Stäbe aus homogenem elastischen Material, behandelt werden. Auf diesen hatten auch SAINT VENANT und NEUMANN ihre Betrachtungen eingeschränkt. Die wesentlichen Vereinfachungen bestehen dabei darin, daß man näherungsweise mit ebenen Stauchungszuständen rechnen darf. Im Rahmen dieser Unterstellung soll hier aber noch nicht der Stoß freier Stäbe, sondern der eines freien gegen einen gleichen festen Stab behandelt werden. Seinen Grund hat das darin, daß dieser Einzelfall mathematisch eine geschlossene Lösung zuläßt. Zunächst sollen jedoch die Stoßansätze in bezug auf unterschiedliche Stäbe, sowohl den Abmessungen wie dem Material nach, entwickelt werden.

Entsprechend der Voraussetzung dürfen die Stauchungen in der einkomponentigen Form

$$w_i(x_i, t) = w_i(x_i, t) \cdot e \quad (61)$$

mit dem Variabilitätsbereich  $0 \leq x_i \leq l_i$  der  $x_i$ -Koordinate angesetzt werden; dabei sollen  $l_i$  die Stablängen und  $x_i$  die Lagen der Querschnittsflächen der Stäbe senkrecht zur Richtung  $e$  der Zentrallinie sein. Weiter kennzeichnen  $x_i = 0$  die Stoßflächen und  $x_i = l_i$  die jeweils äußeren Stabflächen. Darüberhinaus bedeuten  $F_1 = F_2$  die konstanten Querschnittsflächen,  $E_i$  die Elastizitätsmoduln und  $c_i = (E_i/\rho_i)^{1/2}$  die Ausbreitungsgeschwindigkeiten der Schallwellen in den Stäben. Der Nabla-Operator ist in der Form

$$\nabla = (-1)^i e \partial/\partial x_i, \quad (62)$$

die Spannungs-Dehnungs-Beziehungen sind dem HOOKEschen Gesetz entsprechend in der Form

$$\sigma_i(x_i, t) = (-1)^i E_i w_{i;x_i}(x_i, t) \quad (63)$$

anzusetzen.

Zur Konstruktion der Stauchungen  $w_i$  ist es zweckmäßig, die dimensionslosen Parameter

$$\lambda_i = \frac{c_1 l_i}{c_i l_1}, \quad P_i = \left( -\frac{m_1}{m_2} \lambda_2 \right)^{i-1} \quad (64)$$

mit den Stabmassen  $m_i$  sowie die Veränderlichen

$$\xi_i = \lambda_i \frac{x_i}{l_i}, \quad \tau = \frac{c_1}{l_1} t \quad (65)$$

einzuführen. Damit bestimmen sich die Charakteristiken der Schallausbreitung zu

$$\eta_i = \tau - \xi_i, \quad \zeta_i = \tau + \xi_i. \quad (66)$$

Mit diesen Charakteristiken definieren wir die D'ALEMBERTSchen Ausdrücke

$$\begin{aligned} \text{a) } w_1(\xi_1, \tau) &= f(\eta_1) + \sum_{k=1}^{\infty} \{f(\eta_1 - 2k) + f(\zeta_1 - 2k)\}, \\ \text{b) } w_2(\xi_2, \tau) &= P_2 \left[ f(\eta_2) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \{f(\eta_2 - 2k\lambda_2) + f(\zeta_2 - 2k\lambda_2)\} \right], \end{aligned} \quad (67)$$

wobei die Funktion  $f(\varrho)$  den Forderungen

$$\{f(\varrho), f'(\varrho), f''(\varrho)\} = \begin{cases} 0 & \text{für } \varrho \leq 0 \\ \neq 0 & \text{für } \varrho > 0 \end{cases} \quad (68)$$

unterliege; dabei deute der Strich am Funktionszeichen  $f$  Ableitung nach dem Argument  $\varrho$  an. Die D'ALEMBERTSchen Ausdrücke (67) sind nur scheinbar unendliche Summen, da für endliches  $\varrho > 0$  wegen (68) stets nur eine endliche Anzahl ihrer Summanden von Null verschieden sind.

## 2. Die Eigenschaften der D'ALEMBERTSchen Ausdrücke

Aus den D'ALEMBERTSchen Ausdrücken (67) liest man die nachstehenden Eigenschaften ab: Sie sind Integrale der Wellengleichungen

$$w_{i;\tau\tau} = w_{i;\xi_i\xi_i}, \quad (69)$$

die unter den erhobenen Voraussetzungen die Feldgleichungen (39) sind. Das Integral (67a) genügt der Bedingung der Lastfreiheit an der äußeren Stabfläche  $\xi_1 = 1$  bzw.  $x_1 = l_1$ :

$$w_{1;\xi_1}(1, \tau) = 0. \quad (70)$$

Das Integral (67b) erfüllt die Bedingung der Unverrückbarkeit für die Stabfläche  $\xi_2 = \lambda_2$  bzw.  $x_2 = l_2$ :

$$w_2(\lambda_2, \tau) = 0. \quad (71)$$

Dabei bezieht sich der Index 1 auf den freien ersten und der Index 2 auf den festen zweiten Stab, der an seiner Fläche  $x_2 = l_2$  festgehalten wird. Auf Grund der Eigenschaften

$$w_{i;\xi_i}(0, \tau) = -P_i f'(\tau) \quad (72)$$

bestehen an den Stoßflächen  $\xi_i = 0$  unter Beachtung der Festsetzung (64) die (2) entsprechenden Wechselwirkungsbedingungen

$$w_{2;\xi_2}(0, \tau) = P_2 w_{1;\xi_1}(0, \tau). \quad (73)$$

Schließlich bestehen noch wegen der Verabredungen (68) die (40) entsprechenden Anfangsbedingungen

$$w_i = \dot{w}_i = \ddot{w}_i = 0 \quad \text{für } \tau \leq \xi_i. \quad (74)$$

An den Eigenschaften (72) wird deutlich, daß der Stoß der Stäbe theoretisch so angegangen wird, daß man die Stoßflächen wechselseitig gleichen zeitlich veränderlichen Stoßkräften aussetzt und unter ihrer Einwirkung die Stauchung der Stäbe getrennt voneinander beschreibt. In der Behandlung des gleichen Problems durch NEUMANN werden die stoßenden Stäbe zu einem elastischen Kontinuum zusammengefügt.

## 3. Der Ansatz für die Funktion $f(\varrho)$

Für die in (67) unbestimmt angesetzte Funktion  $f(\varrho)$  liegt der allgemeine Ansatz

$$f(\varrho) = P_0 F(\varrho) \quad (75)$$

nahe, in dem  $P_0$  eine multiplikative Konstante und  $F(\varrho)$  die Potenzreihe

$$F(\varrho) = \frac{\varrho^3}{3} + \sum_{n=1}^N B_n \frac{\varrho^{3+n}}{3+n} \quad (76)$$

mit beliebigen Konstanten  $B_n$  sind.

Das Anlaufen von  $F(\varrho)$  mit der dritten Potenz von  $\varrho$  ist dabei eine Folge der Voraussetzung (68), welche das stetige Einschalten der Funktion  $f(\varrho)$  nur bis zur zweiten Ableitung, aber nicht darüberhinaus verlangt. Der Ansatz (75, 76) ist darum in dem Sinne gerechtfertigt, daß man die Bedingung

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0} f'(\varrho) \rightarrow 2P_0\varrho \quad (77)$$

postuliert. Physikalisch bedeutet sie, daß man die Eigenschaft stetigen Einschaltens nicht über die Beschleunigungsgrößen hinaus erhebt.

## 4. Die Normierung der Stoßgrößen

Nach (41) sind die Stauchungen (67) so zu normieren, daß die Äquivalenz

$$-\int_0^1 w_{1;\tau}(\xi_1, \tau_k) d\xi_1 = \frac{l_1}{c_1} \frac{G_1(0)}{m_1} \quad (78)$$

besteht; dabei bedeutet  $\tau_k$  die Abkürzung

$$\tau_k = \frac{c_1}{l_1} t_k \quad (79)$$

mit  $t_k$  als der Kompressionsdauer. Geht man mit dem Ausdruck (67) in das Integral (78) hinein, so bestimmt sich unter Beachtung von (75) die multiplikative Konstante  $P_0$  zu

$$P_0 = -\frac{l_1}{c_1} \frac{G_1(0)}{m_1} \frac{1}{F(\tau_k)}. \quad (80)$$

Hier ist eine Anmerkung notwendig: Zwischen dem Stoß freier Stäbe und dem eines freien mit einem festen Stab besteht hinsichtlich der Verteilung der anfänglichen Bewegungsgröße im System ein grundsätzlicher Unterschied. Im zweiten Stoßfall kann nämlich die Bewegungsgröße nicht so auf die Stäbe verteilt werden, daß ein jeder daran den gleichen Anteil hat. Vielmehr muß hier dem freien ersten Stab die gesamte anfängliche Bewegungsgröße allein gemäß

$$G_1(0) = m_1 v_1(0) > 0, \quad G_2(0) = m_2 v_2(0) = 0 \quad (81)$$

zuerteilt werden. Die Relativbewegung ist also in diesem zweiten Stoßfall nicht mechanisch wie in (9), sondern vielmehr dynamisch wie in (81) zu beurteilen.

Weiter ist in dem hier betrachteten Stoßfall die Form der Kartesischen Impulserhaltung (8) nur in bezug auf den ersten Stab entsprechend

$$G_1(t) + W_1(t) = G_1(0) \quad (82)$$

richtig. Denn hinsichtlich des festen zweiten Stabes ist die Gleichung (3) der Stoßimpulsänderung um die Hinzunahme der Reaktionskraft  $Z_2(t)$  von der starren Wand auf die festgehaltene Stabfläche  $x_2 = l_2$  zu erweitern und demzufolge in der Weise

$$-\dot{W}_2 = K_{21} - Z_2 \quad (83)$$

anzusetzen.

Der Wert  $\tau_k$  in (79) ist nach (23) unter Beachtung von (63) und (72) aus der Forderung

$$-w_{1;\dot{s}_1}(0, \tau_k) = P_0 F'(\tau_k) = \text{Max} \quad (84)$$

bzw. aus der dafür notwendigen Bedingung

$$\frac{1}{\tau_k} F''(\tau_k) = 2 + \sum_{n=1}^N (2+n) B_n \tau_k^n = 0 \quad (85)$$

festzulegen. Nach (84) wie (80) sind damit  $\tau_k$  wie  $P_0$  bestimmt, wenn die Konstanten  $B_n$  es sind.

Man stellt damit fest, daß die bisherigen Stoßansätze das anstehende Problem wegen der Willkürlichkeit der Konstanten  $B_n$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ) unterbestimmt lassen. Also muß man sich nach weiteren Bedingungen für die  $B_n$  umsehen. Im Stoßfall freier Stäbe sind dazu die Wechselseitigkeitsbedingungen (48) für das Stoßende in Verbindung mit der Maximumforderung (49) für die Stoßzahl in Ansatz zu bringen. In dem hier betrachteten Stoß eines freien gegen einen gleichen festen Stab aber können wir diese Bedingungen auf die Forderung zurückführen, daß beide Stäbe bei Stoßende wieder im Grundzustand vom Stoßanfang sind, der Stoß also vollkommen elastisch verläuft.

### 5. Die Stoßendbedingungen

Mit  $t_e$  als Stoßzeit ist

$$\tau_e = \frac{c_1}{l_1} t_e \quad (86)$$

der dimensionslose Stoßendparameter. Dieser ist nach (24) in Verbindung mit (63) und (72) aus der Bedingung

$$\frac{1}{\tau_e^2} F'(\tau_e) = 1 + \sum_{n=1}^N B_n \tau_e^n = 0 \quad (87)$$

zu bestimmen. Zur vollständigen Charakterisierung des Stoßendes postulieren wir das Bestehen der Kompressionsfreiheit der Stäbe

$$\text{a) } w_1(0, \tau_e) - w_1(1, \tau_e) = 0, \quad \text{b) } w_2(0, \tau_e) = 0 \quad (88)$$

und damit den Grundzustand von Stoßanfang.

Wählt man in dem Ansatz (76) die Konstantenbestimmungen

$$B_1 = -\frac{2}{\tau_e}, \quad B_2 = \frac{1}{\tau_e^2}, \quad N = 2, \quad (89)$$

so erhält man die Darstellung

$$F'(\tau) = \tau^2 \left(1 - \frac{\tau}{\tau_e}\right)^2. \quad (90)$$

Mit ihr ist die Bedingung (87),  $F'(\tau_e) = 0$ , befriedigt. Aus (90) erschließt man das Maximum (84) für den Wert

$$\tau = \tau_k = \frac{\tau_e}{2}. \quad (91)$$

Aus der Symmetrie der Kurve (90) zum Zeitpunkt  $\tau_k$  folgen die Symmetriebedingungen

$$F'(\tau_k - \varphi) = F'(\tau_k + \varphi) \quad \text{mit} \quad 0 \leq \varphi \leq \tau_k. \quad (92)$$

Integriert man sie nach  $\varphi$  zwischen den Grenzen 0 und  $\tau_k$  bzw.  $\tau_k - \alpha$  und  $\tau_k - \beta$ , so entstehen daraus die identisch verschwindenden Relationen

$$\begin{aligned} F(2\tau_k) - 2F(\tau_k) &= 0, \\ F(\beta) - F(\alpha) - F(2\tau_k - \beta) + F(2\tau_k - \alpha) &= 0. \end{aligned} \quad (93)$$

Aus der ersteren folgt in Verbindung mit (90) und (91)

$$F(\tau_e) = 2F(\tau_k) = 2\frac{\tau_e^3}{60}. \quad (94)$$

Geht man mit dem Ausdruck (67a) in die Forderung (88a) hinein, so ergibt sich daraus die Forderung

$$w_1(0, \tau_e) - w_1(1, \tau_e) = P_0 \left[ F(\tau_e) - 2F(\tau_e - 1) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \{F(\tau_e - 2k) - F(\tau_e - 2k - 1)\} \right]. \quad (95)$$

Hier beweist man für die diskreten Zahlenwerte

$$\tau_e = 2m, \quad m = 1, 2, \dots \quad (96)$$

mit den Relationen (93) das Verschwinden der Volumdehnung (88a) bezüglich des ersten freien Stabes. Mit (96) läßt sich nämlich (95) in die Form

$$\begin{aligned} w_1(0, 2m) - w_1(1, 2m) &= P_0 \left[ \{F(2m) - 2F(m)\} + \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{k=1}^{[m/2]} \{F(2k) - F(2k - 1) - F(2m - 2k - 1) + F(2m - 2k)\} \right] \end{aligned} \quad (97)$$

umordnen, wo  $[a]$  die größte natürliche Zahl bedeutet, die höchstens gleich  $a$  ist. Hier entstehen die in geschweiften Klammern stehenden Summanden von (97), wenn man in den Relationen (93)  $\tau_k = m$ ,  $\alpha = 2k - 1$ ,  $\beta = 2k$  setzt. Demzufolge verschwindet der ganze Ausdruck (97).

Fragt man nun nach dem gleichzeitigen Verschwinden der Volumdehnung (88b) des zweiten festen Stabes mit den diskreten Werten (96), also nach der Möglichkeit

$$w_2(0, 2m) = P_0 P_2 \left[ F(2m) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k F(2m - 2k\lambda_2) \right] = 0, \quad (98)$$

so verlangt diese zunächst einmal das Bestehen der Gleichheit

$$\lambda_2 = \lambda_1 = 1 \quad \text{bzw.} \quad \frac{l_2}{c_2} = \frac{l_1}{c_1}. \quad (99)$$

Sie bedeutet Gleichheit der Stäbe in bezug auf die Durchlaufzeit der Schallwellen in ihnen. Darüberhinaus aber hat man die natürlichen Zahlen  $m$  in (96) auf die geradzahigen

$$m = 2n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (100)$$

einzuschränken.

Erst unter den Bedingungen (99) und (100) zusammen läßt sich nämlich (98) in die (97) analoge Form

$$w_2(0, 4n) = P_0 P_2 \left[ \{F(4n) - 2F(2n)\} + 2 \sum_{k=1}^{[n/2]} \{F(4k) - F(4k - 2) - F(4n - 4k + 2) + F(4n - 4k)\} \right] \quad (101)$$

umordnen. Dann entstehen auch hier die in den geschweiften Klammern stehenden Summanden von (101), wenn man in den Relationen (93)  $\tau_k = 2n$ ,  $\alpha = 4k - 2$ ,  $\beta = 4k$  setzt. Also verschwindet dann gleichfalls der ganze Ausdruck (101). Damit ist für die diskreten Werte

$$\tau_e = 4n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (102)$$

in der Tat das gleichzeitige Verschwinden der Volumdehnungen (88a, b) von beiden Stäben gewährleistet. Nun sollte aber der wirkliche Stoßzeitwert der unterst mögliche mit  $n = 1$  sein und damit die Stoßzeit

$$\tau_e = 4 \quad (103)$$

betragen. Was diese Stoßzeit (103) mit der Konsequenz der Spannungsfreiheit der Stäbe zu diesem Augenblick anbelangt, so wird dieses durch spannungsoptische Druckmessungen von SCHWIEGER [6] an Glasstäben experimentell vollauf bestätigt.

Mit dem Stoßzeitwert (103) bestimmen sich die Konstanten  $B_n$  nach (89) zahlenmäßig zu

$$B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{16}, \quad N = 2, \quad (104)$$

so daß nach (76) die Funktion  $F(\varrho)$  zu

$$F(\varrho) = \varrho^3 \left( \frac{1}{3} - \frac{\varrho}{8} + \frac{\varrho^2}{80} \right) \quad (105)$$

festgelegt wird. In Verbindung mit (94) und (103) ergibt sich aus (80) der Normierungsfaktor der Stauchungsgrößen zu

$$P_0 = -\frac{l_1}{c_1} v_1(0) \frac{15}{16}, \tag{106}$$

wenn man dabei die Festsetzung (81) beachtet. Damit ist alles festgelegt, um die in diesem Stoßfall bewirkten Stoßgrößen numerisch angeben zu können.

6. Die Darstellung der Stoßgrößen

Mit der Kenntnis des Normierungsfaktors (106) und der Funktion  $F(\rho)$  nach (105) kann nunmehr die Darstellung der Stoßgrößen im Stoßfall eines freien gegen einen gleichen festen Stab gegeben werden.

a) Die resultierenden Stoßgrößen

Für die Stoßkräfte erhält man in ihrer Zeitabhängigkeit aus (63) unter Beachtung von (72) die Darstellungen

$$K_{ij}(\tau) = (-1)^i \frac{c_1}{l_1} G_1(0) \frac{F'(\tau)}{F(\tau_k)} = (-1)^i \frac{c_1}{l_1} G_1(0) \left[ \frac{15}{16} \tau^2 \left( 1 - \frac{\tau}{4} \right)^2 \right]. \tag{107}$$

Im Gegensatz zu diesen glockenförmigen Stoßkraftkurven ergeben die NEUMANN'schen Stoßansätze die Stoßkraftbestimmungen

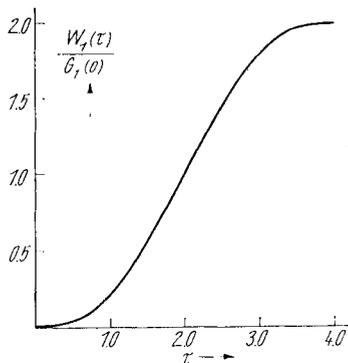
$$K_{ij}(\tau) = (-1)^i \frac{c_1}{l_1} G_1(0) \left[ \frac{1}{2} \right] \quad \text{für } 0 \leq \tau \leq 4.$$

Hiernach müßte die Kraft auf die Stoßflächen zu Stoßbeginn unstetig mit diesem endlichen Wert einsetzen und ihn über die ganze Stoßzeit hin beibehalten. Folglich müßten die Stoßflächen während der Stoßzeit unbeschleunigt sein.

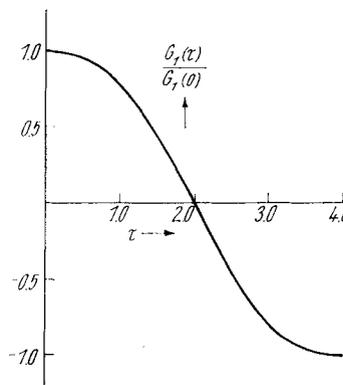
Mit (107) bestimmt sich die Zeitabhängigkeit des Stoßimpulses vom freien ersten Stab nach (5) zu

$$W_1(\tau) = G_1(0) \frac{F(\tau)}{F(\tau_k)} = G_1(0) \left[ 2 \left( \frac{\tau}{4} \right)^3 \left\{ 1 + 3 \left( 1 - \frac{\tau}{4} \right) \left( 3 - \frac{\tau}{2} \right) \right\} \right]. \tag{108}$$

Das ergibt die in der Figur 1 gezeichnete Kurve. Sie zeigt monotonen Wachsen vom Wert  $W_1(0) = 0$  über den Wert  $W_1(2) = G_1(0)$  auf den Endwert  $W_1(4) = 2G_1(0)$ .



Figur 1. Der Stoßimpuls auf den freien ersten Stab



Figur 2. Die Bewegungsgröße vom freien ersten Stab

Mit (108) wieder erhält man über die Kartesische Impulserhaltung (8) bzw. (82) die Bewegungsgröße vom freien ersten Stab in ihrer Zeitabhängigkeit zu

$$G_1(\tau) = G_1(0) \left\{ 1 - \frac{F(\tau)}{F(\tau_k)} \right\} = G_1(0) \left[ \left( 1 - \frac{\tau}{2} \right) \left\{ 1 + \frac{\tau}{2} \left( 1 - \frac{\tau}{4} \right) \left( 1 + \frac{3}{4} \tau + \frac{3}{16} \tau^2 \right) \right\} \right]. \tag{109}$$

Das ergibt die in Figur 2 dargestellte Kurve. Sie zeigt in der Kompressionsphase  $0 < \tau < 2$  ein monotonen Abnehmen vom anfänglichen Wert  $G_1(0)$  bis auf den Wert  $G_1(2) = 0$  und in der Restitutionsphase  $2 < \tau < 4$  ein stetiges Anwachsen mit entgegengesetzter Größe bis auf den Endwert  $G_1(4) = -G_1(0)$ , so daß der freie Stab bei Stoßende die anfängliche Bewegungsgröße in entgegengesetzter Richtung hat.

Mit der Festlegung (108) erhält man nach (27) als Wert für die Stoßzahl

$$R = \frac{F(\tau_e)}{F(\tau_k)} - 1 = 2 - 1 = 1 \tag{110}$$

und damit die des vollkommen elastischen Stoßes (30).

Aus (83) ergibt sich in Verbindung mit (67b) die Zeitabhängigkeit der Reaktionskraft  $Z_2$  zu

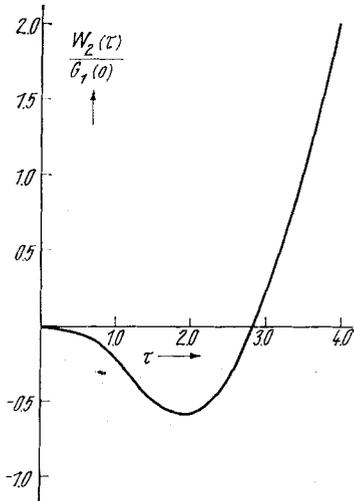
$$Z_2(\tau) = E_2 F_2 w_{2;x_2}(l_2, t) = \frac{c_1}{l_1} G_1(0) \frac{15}{8} \{ F'(\tau - 1) + F'(\tau - 3) \}. \tag{111}$$

Hieran zeigt sich, daß die Reaktionskraft an der starren Wand erst nach der Durchlaufzeit der Schallwellen durch den zweiten festen Stab auftritt. In Verbindung mit (107) und (111) erhält man aus (83) für den Stoßimpuls auf den festen zweiten Stab die Darstellung

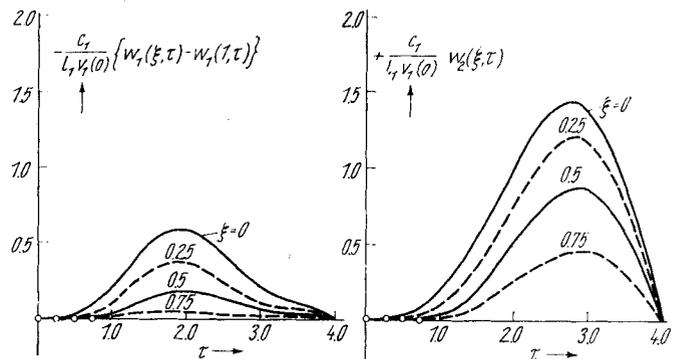
$$W_2(\tau) = -G_1(0) \frac{16}{15} \{ F(\tau) - 2F(\tau - 1) - 2F(\tau - 3) \}. \tag{112}$$

Das ergibt die in der Figur 3 gezeichnete Kurve. Bis zum Zeitpunkt  $\tau = 1$  gilt wie im Stoßfall freier Stäbe die Wechselseitigkeitsbedingung (6). Erst von  $\tau = 1$  an beginnt sich der Stoßimpuls von der starren Wand auf den zweiten festen Stab auszuwirken. Das bedingt die Umkehr der Stoßimpulskurve und ihr Anwachsen auf den Endwert  $W_2(4) = 2G_1(0)$ .

Damit sind alle resultierenden Stoßgrößen in ihrer Zeitabhängigkeit dargestellt.



Figur 3. Der Stoßimpuls auf den festen zweiten Stab



Figur 4. Die Kompressionsverschiebungen der Querschnittsflächen  $\xi = 0, 0.25, 0.5, 0.75$  vom freien ersten und festen zweiten Stab

b) Die feldabhängigen Stoßgrößen

Statt einer aus (67a, b) leicht ableitbaren formelmäßigen Angabe sollen von den feldabhängigen Stoßgrößen lediglich graphische Darstellungen angegeben werden.

In Figur 4 sind von den Flächen

$$\xi = 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1 \tag{113}$$

die Kompressionsverschiebungen im freien ersten Stab

$$- \frac{c_1}{l_1 v_1(0)} \{ w_1(\xi, \tau) - w_1(1, \tau) \}$$

den entsprechenden im zweiten festen Stab

$$\frac{c_1}{l_1 v_1(0)} w_2(\xi, \tau)$$

in Abhängigkeit vom Zeitparameter  $\tau$  gegenübergestellt. Sie zeigen den erwarteten Verlauf mit zunächst monotonem Anstieg bis zu einem gewissen maximalen Wert und dann monotonen Abfall bis zum Endwert Null bei Stoßende. Zu bemerken ist, daß die Kompressionsbeanspruchung des freien ersten Stabes auf Grund der Aufteilung des Gesamtimpulses auf die Bewegungsgröße und den Stoßimpuls wesentlich kleiner als die des festen zweiten Stabes ist, bei dem der Gesamtimpuls mit dem Stoßimpuls identisch ist.

In Figur 5 sind der auf die Flächen (113) lastende Druck im freien und festen Stab mit der Ordinate

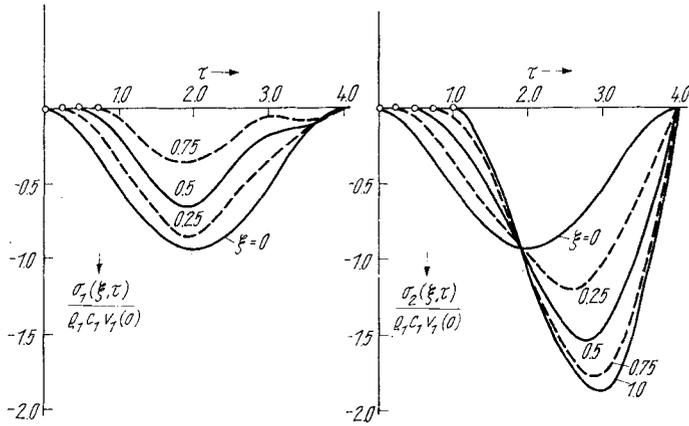
$$\frac{\sigma_i(\xi, \tau)}{\rho_1 c_1 v_1(0)}$$

in Abhängigkeit vom Zeitparameter  $\tau$  dargestellt. Dabei kennzeichnen die Kurven  $\xi = 0$  den Stoßkraftverlauf an den Stoßflächen. Die Kurve  $\sigma_2(1, \tau)$  entspricht der von der starren Wand auf den zweiten Stab ausgeübten Reaktionskraft (111) in ihrer Zeitabhängigkeit. Zufolge der Spannungsverdopplung an der festgehaltenen Fläche  $\xi_2 = 1$  übersteigt ihr maximaler Wert den von der Stoßfläche um das Doppelte. Die Druckkurven  $\sigma_2(\xi, \tau)$  zeigen den von SCHWIEGER spannungsoptisch aufgenommenen zeitlichen Verlauf.

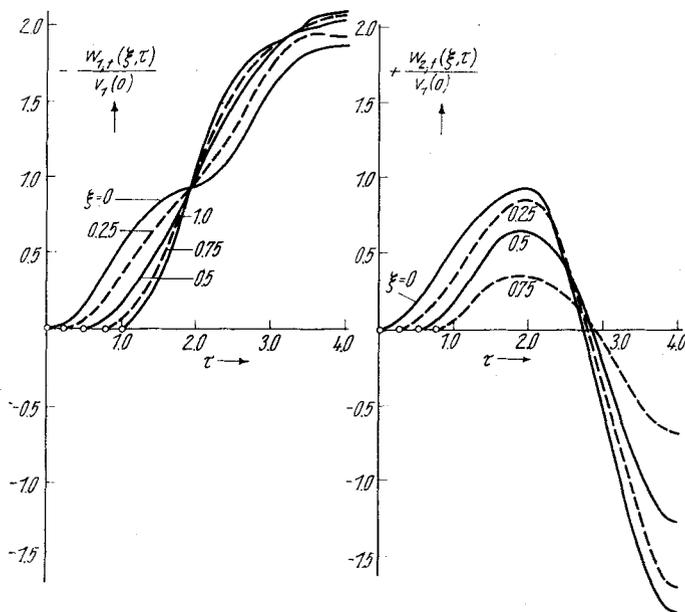
In Figur 6 sind die Stauchungsgeschwindigkeiten für die Flächen (113) mit der Ordinate

$$\frac{(-1)^i}{v_1(0)} w_{i,t}(\xi, \tau)$$

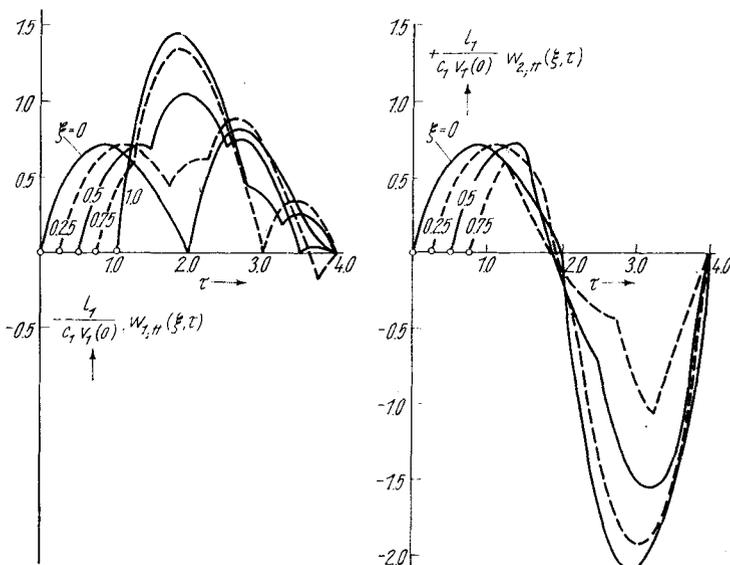
in Abhängigkeit vom Zeitparameter  $\tau$  gezeichnet. Die Teilchengeschwindigkeiten erfahren hiernach in Übereinstimmung mit den Beobachtungen von SCHWIEGER keine un stetigen Änderungen, wie das nach NEUMANN der Fall sein sollte, sondern wachsen stetig vom Ruhezustand aus an.



Figur 5. Die Druckspannungen an den Querschnittsflächen  $\xi = 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1$  vom freien ersten und festen zweiten Stab



Figur 6. Die Stauchungsgeschwindigkeiten der Querschnittsflächen  $\xi = 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1$  vom freien ersten und festen zweiten Stab



Figur 7. Die Stauchungsbeschleunigungen der Querschnittsflächen  $\xi = 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1$  vom freien ersten und festen zweiten Stab

In Figur 7 sind die Stauchungsbeschleunigungen bzw. Verzerrungen für die Flächen (113) mit der Ordinate

$$\frac{(-1)^i l_1}{c_1 v_1(0)} w_{i;\tau\tau}(\xi, \tau)$$

in Abhängigkeit vom Zeitparameter  $\tau$  aufgetragen. Ihnen entnimmt man, daß bei Stoßende die Beschleunigungen jeder Querschnittsfläche wieder Null sind. Die Knicke in den Beschleunigungskurven haben ihren Grund darin, daß entsprechend des Ansatzes für  $F(\varrho)$  nach (76) bzw. (105)  $F'''(\varrho)$  für  $\varrho = 0$  eine unstetige Funktion ist.

Zusammenfassend stellt man damit fest: Während sich die resultierenden Stoßgrößen bis auf die Reaktionskraft  $Z_2(t)$  vom Berührungszeitpunkt  $t = 0$  an stetig zu ändern beginnen, tun das die Feldgrößen wie auch die Reaktionskraft  $Z_2(t)$  erst von den lagenabhängigen Zeiten

$$\tau = \xi > 0 \quad \text{bzw.} \quad t = \frac{x_i}{l_i},$$

also erst von einer Zeit an, zu der die Stauchungsfront die betreffende Querschnittsfläche  $x_i$  in den Stäben erreicht. Damit ist der Stetigkeit aller Stoßgrößen Rechnung getragen, eine Notwendigkeit, der bisher noch keine Stoßtheorie zu genügen vermochte. Zum Schluß dieser Arbeit soll das nicht unerwähnt bleiben.

Die grundsätzlichen Betrachtungen zum Körperstoßproblem gründen sich auf Erwägungen, wie sie KANT. in seinen „Metaphysischen Anfangsgründen der Naturwissenschaft“ angestellt hat. Es kann hier aber nicht der Ort sein, solchen Nachweis anzutreten.

### Literatur

- 1 SZABÓ, I., Einführung in die technische Mechanik, Springer-Verlag 1956, S. 318.
- 2 DE SAINT VENANT, B., Comptes rendus 95 (1882), S. 359 u. S. 423.
- 3 NEUMANN, F., Vorlesungen über die Theorie der Elastizität, Leipzig 1885, S. 332 ff.
- 4 WINKELMANN, Handb. d. Physik Bd. I.1 (1908), S. 767 ff.
- 5 GEIGER u. SCHEEL, Handb. d. Physik Bd. IV (1928), S. 526 ff.
- 6 SCHWIEGER, H., Ann. Physik 16 (1955), S. 119 ff.

Eingereicht am 16. 7. 1975, revidierte Fassung am 21. 4. 1976

*Anschrift:* Dr. R. FRISCHBIER, Sektion Physik der MARTIN-LUTHER-Universität, DDR-402 Halle (Saale), Friedemann-Bach-Platz 6, DDR