Der axiale Stoss zweier elastischer Stäbe

1- Mechanische Theorie des Stoßes

stoss1.pdf

1.1 Physikalische Größen der Stäbe 1 und 2

Geometriedaten	**Materialdaten**
$L1, L2$ - Längen	$\rho 1, \rho 2$ -Dichten
$A1, A2$ - Querschnitte	$E1, E2$ - Elastizitätsmodule

abgeleitete Eigenschaften

$m1 = L1 \cdot A1 \cdot \rho 1$	$m2 = L2 \cdot A2 \cdot \rho 2$	Stabmassen	{1.0.1}
$c1^2 = E1/\rho 1$	$c2^2 = E2/\rho 2$	Schallgeschwindigkeiten	{1.0.2}
$T1 = L1/c1$	$T2 = L2/c2$	Laufzeiten des Schalls für L1 und L2	{1.0.3}
$\omega 1 = \pi/T1$	$\omega 2 = \pi/T2$	Kleinsten Eigenfrequenzen>0 freier Stäbe	{1.0.4}

zeitabhängige Größen

$d1, d2$ -Längenänderung der Stäbe

$s1, s2$ -X-Koordinaten der Massenmittelpunkte im Laborsystem

Xst - X-Koordinate der Stoßstelle im Laborsystem

vXst - Geschwindigkeit der Stoßstelle im Laborsystem

$v1 = \partial s1/\partial t$, $v2 = \partial s2/\partial t$-Geschwindigkeiten der Massenmittelpunkte

$\partial^2 s1/\partial t^2$, $\partial^2 s2/\partial t^2$ - Beschleunigungen der Massen 1 und 2

Fs - X-Komponente der Stoßkraft

F_T - X-Komponente der Trägheitskraft

1.2 charakteristische Vorgangsgrössen

$mr = (m1 \cdot m2)/(m1+m2)$	reduzierte Masse	mehr zur mr	{1.0.5}
$\omega = (\omega 1 \cdot \omega 2/\pi) \cdot \sqrt{2 \cdot (m1+m2)/(m1 \cdot \omega 1^2 + m2 \cdot \omega 2^2)}$	Stossfrequenz		{1.0.6}
$\omega = \sqrt{2 \cdot (m1+m2)/(m1 \cdot T2^2 + m2 \cdot T1^2)}$			{1.0.6}
$Ts = \pi \cdot \sqrt{(m1 \cdot T2^2 + m2 \cdot T1^2)/(2 \cdot (m1+m2))}$	Stoßzeit		{1.0.7}
$Ts = \pi \cdot \sqrt{(mr/2) \cdot (T1^2/m1 + T2^2/m2)}$	Stoßzeit		{1.0.7}

1.3 Physikalische Grundlagen

newtonsche Axiome 2 und 3

$Fs = -m1 \cdot \partial^2 s1/\partial t^2 = m2 \cdot \partial^2 s2/\partial t^2$

$m1 \cdot \partial^2 s1/\partial t^2 + m2 \cdot \partial^2 s2/\partial t^2 = 0$

$\boldsymbol{\partial^2 s1/\partial t^2 - \partial^2 s2/\partial t^2 = -Fs \cdot (1/m1 + 1/m2) \quad = -Fs/mr}$ {1.1}

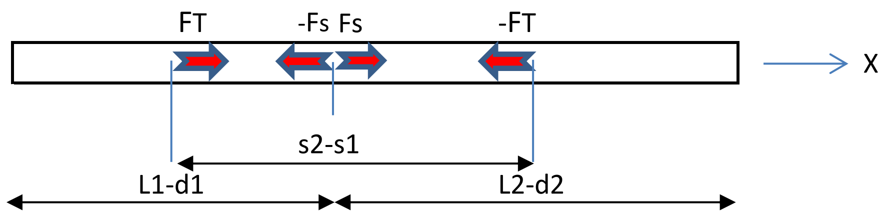
hookesches Gesetz für beide Stäbe

$d1 = Fs \cdot L1/(A1 \cdot E1)$	$d2 = Fs \cdot L2/(A2 \cdot E2)$	Deformationen (Längenänderungen)	
$m1 = L1 \cdot A1 \cdot \rho 1$	$m2 = L2 \cdot A2 \cdot \rho 2$	Massen	
$d1 = (Fs/m1) \cdot (L1/c1)^2$	$d2 = (Fs/m2) \cdot (L2/c2)^2$	wegen $L1/c1 = T1$ und $L2/c2 = T2$	
$\boldsymbol{d1 = (Fs/m1) \cdot T1^2}$	$\boldsymbol{d2 = (Fs/m2) \cdot T2^2}$		{1.2}

1.4 Deformationsbedingung

Aus den Massenmittelpunktlagen im durch ein Kraftpaar $Fs, -F_T$ gestauchten Zustand ergibt sich für den Abstand der Massenmittelpunkte:

$\boldsymbol{s2 - s1 = L1/2 + L2/2 - (d1/2 + d2/2)}$ {1.3}



1.5 Bestimmung der Stoßkraft

Das hookesche Gesetz für zwei sich axial drückende Stäbe ergibt im dynamischen Gleichgewicht (Trägheitskraft+Stoßkraft =0) für den Abstand der Massenmittelpunkte aus {1.1} die DG. {1.7}. Trägheitskraft

$s2-s1= L1/2+L2/2 -(Fs/2)*(T2^2/m2+T1^2/m1)$ {1.4}

$Fs=2*(m1*m2)/(m1*T2^2+m2*T1^2)*(s1-s2)$ {1.5}

Bei Einführung der Stoßfrequenz ω gemäß:

$\omega^2=2* (m1+m2)/(m1*T2^2+m2*T1^2)$ {1.6}

entsteht die Differenzialgleichung:

$\boldsymbol{\partial^2 s1/\partial t^2-\partial^2 s2/\partial t^2=(-2*(m1+m2)/(m1*T2^2+m2*T1^2))*(s1-s2) \quad =-\omega^2*(s1-s2)}$ {1.7}

Differenziert man Gleichung {1.5} nach der Zeit so entsteht auf der rechten Seite die Relativgeschwindigkeit der Stäbe in der Stoßphase.
Die Stoßkraft erreicht das Maximum wenn die Relativgeschwindigkeit der Stäbe verschwindet. Dieser Zeitpunkt beendet die Kompressionsphase.
Die Stäbe bewegen sich zu diesem Zeitpunkt mit der in allen 3 Stoßphasen konstanten Geschwindigkeit des Massenmittelpunktes beider Stäbe.

Berechnet man die kinetische Energie beider Stäbe im gemeinsamen Schwerpunktsystem, das sich mit der konstanten Geschwindigkeit Schwerpunktsystem

$\boldsymbol{vs=(m1*v1+m2*v2)/(m1+m2)}$ {1.5.1}

im Laborsystem bewegt, so bestimmt sich die kinetischen Energie wie folgt:

$\boldsymbol{E\_s=(1/2)*(m1*(v1-vs)^2 +m2*(v2-vs)^2)}$ {1.5.2}

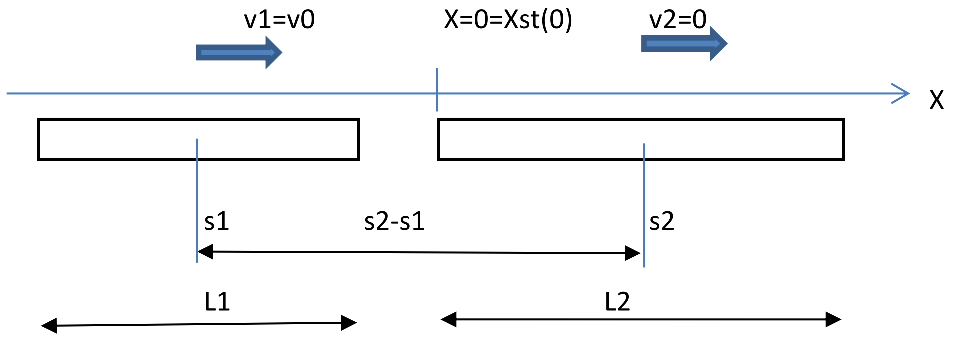
Diese Schwerpunktsenergie erreicht am Ende der Kompressionsphase wegen v1=vs und v2=vs den Wert Null. Schwerpunktsenergie
Beim Stoß wird demzufolge die Schwerpunktsenergie als Verformung in beiden Stäben gespeichert und bei Elastizität zurückgewonnen.

1.6 Stoßvorgang im Laborsystem

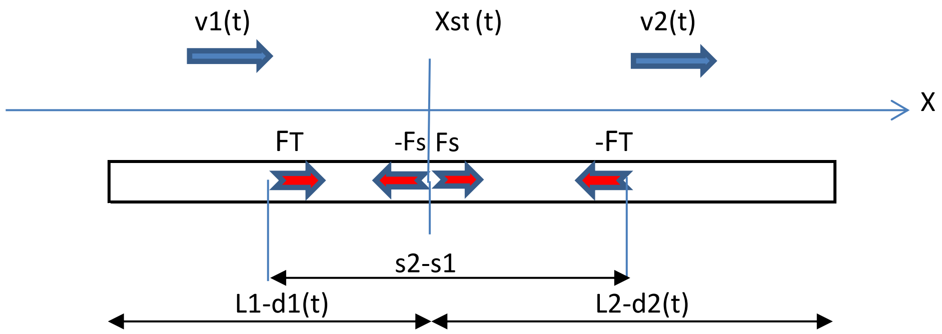
Die zur Lösung der DG. {1.7} notwendigen Anfangsbedingungen wurden im Hinblick auf die experimentelle Prüfung im Laborsystem gewählt. stoss2.pdf
Der Stab1 bewege sich auf der X-Achse mit der Geschwindigkeit v0 gegen den ruhenden Stab2. Der Stoß beginne zum Zeitpunkt t=0 bei X= 0.

Der Stoßvorgang ist in 3 Phasen zu betrachten:

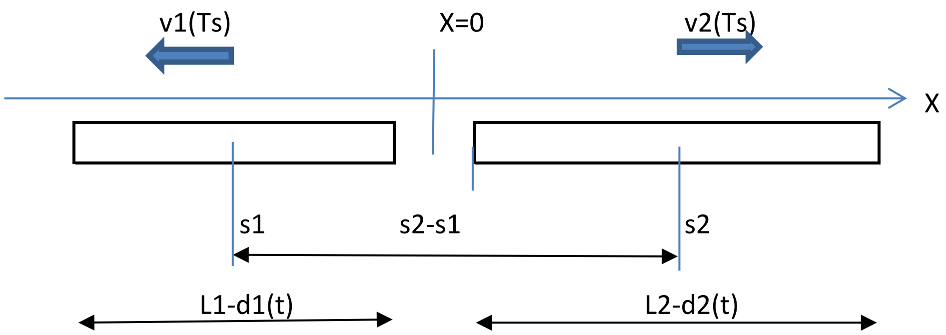
Vorstoßphase: t<0



Stossphase: 0<=t <=Ts



Nachstossphase : t>Ts



1.7 Mechanische Größen der Stoßphase

Nach dem Gesetz der Kontinuität, die Natur macht keine Sprünge, ist die Stetigkeit aller zeitabhängigen mechanischen Größen beim Stoßvorgang zu fordern.

Für die X-Koordinaten der Massenmittelpunkte im Laborsystem gelten die Anfangswerte:

$s1(0)=-L1/2$, $s2(0)=L2/2$, $v1(0) =\partial s1(0)/\partial t = v0$, $v2(0)=\partial s2(0)/\partial t=0$.

Die Anpassung der allgemeinen Lösung von Gleichung {1.7}

ergibt für den Abstand der Schwerpunkte:

$\mathbf{s2-s1= L1/2+L2/2 -(v0/\omega)*\sin(\omega*t)}$ $\quad 0<=\omega*t<=\pi$ {1.8}

Bei Einführung der reduzierten Masse: $mr=(m1*m2)/(m1+m2)$ ergeben sich:

$\mathbf{\partial^2 s1/\partial t^2=-(m2/(m1+m2))*v0*\omega*\sin(\omega*t) \quad =-(mr/m1)*v0*\omega*\sin(\omega*t)}$ {1.9}

$\mathbf{\partial^2 s2/\partial t^2=(m1/(m1+m2))*v0*\omega*\sin(\omega*t) \quad =(mr/m2)*v0*\omega*\sin(\omega*t)}$ {1.10}

$\mathbf{s1=-L1/2+v0*t+ (mr/m1)*(v0/\omega)*(\sin(\omega*t)- \omega*t)}$ $\quad 0<=\omega*t<=\pi$ {1.11}

$\mathbf{s2=L2/2+(mr/m2)*(v0/\omega)*(\omega*t-\sin(\omega*t))}$ $\quad 0<=\omega*t<=\pi$ {1.12}

$\mathbf{v1(t)= v0*(1 -(mr/m1)*(1-\cos(\omega*t)))}$ $\quad 0<=\omega*t<=\pi$ {1.13.1}

$v1(t)= v0*(1 -(m2/(m1+m2))*(1-\cos(\omega*t)))$ $\quad 0<=\omega*t<=\pi$ {1.13.2}

$\mathbf{v2(t)=v0*(mr/m2)*(1-\cos(\omega*t))}$ $\quad 0<=\omega*t<=\pi$ {1.14.1}

$v2(t)=v0*(m1/(m1+m2))*(1-\cos(\omega*t))$ $\quad 0<=\omega*t<=\pi$ {1.14.2}

Für die Stoßkraft gilt:

$\mathbf{Fs=m2*\partial^2 s2/\partial t^2=v0*mr*\omega*\sin(\omega*t)}$ $\quad 0<=\omega*t<=\pi$ {1.15.1}

$Fs=m2*\partial^2 s2/\partial t^2=v0*((m1*m2/(m1+m2))*\omega*\sin(\omega*t)$ $\quad 0<=\omega*t<=\pi$ {1.15.2}

woraus mit der Stoßbedingung (Fs>=0) die Stoßzeit Ts folgt.

$\mathbf{Ts= \pi*} \sqrt{((\boldsymbol{m1} * \boldsymbol{T2}^2 + \boldsymbol{m2} * \boldsymbol{T1}^2)/(\mathbf{2} * \ (\boldsymbol{m1} + \boldsymbol{m2})))}$ {1.16}

Die X-Koordinate der Stoßstelle bewegt sich nach der Deformationbedingung { 1.3}

$Xst(t) : s1+L1/2- d1/2 \quad = s2-L2/2+d2/2$

$\mathbf{Xst(t) =v0*t+ (mr/m1)*(v0/\omega)*((\sin(\omega*t)- \omega*t) -(T1^2/2)*\omega^2*\sin(\omega*t))}$ {1.17.1}

Daraus folgt für die Geschwindigkeit der Stoßstelle:

$\mathbf{vXst(t):=v0*(1+(mr/m1)*((\cos(\omega*t)-1) -(T1^2/2)*\omega^2*\cos(\omega*t)))}$ {1.17.2}

Für die Geschwindigkeiten der Stäbe in der Nachstoßphase ergibt sich:

$\mathbf{v1(t>=Ts)=v0*((m1-m2)/(m1+m2))}$ {1.18}

$\mathbf{v2(t>=Ts)=2*v0*m1/(m1+m2)}$ {1.19}