Der axiale Stoss zweier elastischer Stäbe

3. Diskretes Stabmodell

stoss3.pdf

Zum Verständnis der Reaktion eines Stabes beim Stoß wird ein diskretes Modell behandelt. Die analytische Behandlung ergibt für die Verschiebung der Modellelemente im Laborsystem eine aus Translation und Schwingungen bestehende Lösung.
Im Folgenden werden die Verschiebungen eines aus n=8 Elementen bestehenden Stabes bei axialer Krafteinwirkung auf den ruhenden Stab abgeleitet.
Die für 8 Elemente explizit angegebene Lösung kann wegen der algebraischen Aussagen:
- eine nxn Matrix hat ein charakteristisches Polynom vom Grade n
- ein Polynom vom Grad n hat n reelle/komplexe Nullstellen
- die n Eigenwerte einer symmetrischen nxn Matrix sind rell

auf beliebige Elementzahlen erweitert werden.
Die Abhängigkeit der Eigenfrequenzen wird bis zu 16 Modellelemente angegeben.

3.1 Modellierung

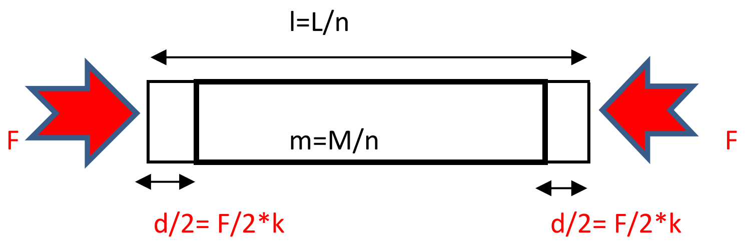
Zur Modellierung werden folgende Symbole verwendet:

n- Elementeanzahl	L-Stabblänge	A-Stabquerschnitt
E-Elastizitätsmodul	ρ-Dichte	√(z) - Wurzel von z

daraus leiten sich folgende Größen ab:

M=ρ*A*L - Stabmasse   m=M/n - Elementmasse
l = L/n - Elementlänge
d- Dehnung eines Elements unter Spannung

Das Stabmaterial verhalte sich nach dem hookeschen Gesetz. ->1



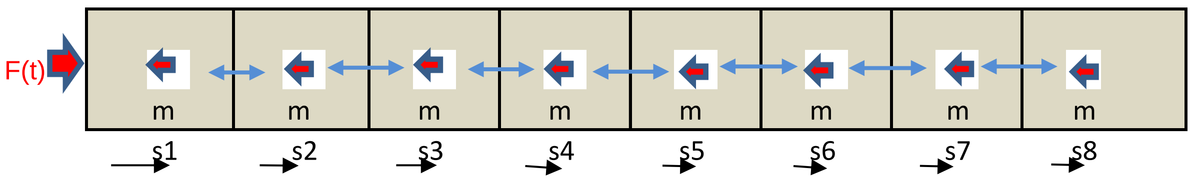
Das Kräftepaar F verursacht im Element die Spannung F/A und die Längenänderung :
d= (L/n)*(F/A)/E   (Elementlänge*Spannung)/ Elastizitätsmodul
Durch Definition der elastischen Konstante

k=n*E*A/L   für   n=1,2,3...

ergibt sich zwischen äußerem Kräftepaar F und Dehnung eines Elements :

F=k*d

Die Verschiebungsvektoren s1...s8 zeigen in dem dargestellten Gleichgewichtszustand von den Massenmittelpunkten bei Stoßbeginn zu den momentanen Massenmittelpunkten.
Im Massenmittelpunkt jeden Elements wirkt die Trägheitskraft $m*si_{tt}$ (i=1..8)



3.2 Die Bewegungsgleichungen des Stabmodells

m*s1tt =F(t) +k*(s2-s1) {3.1.1}

m*s2tt = -k*(s2-s1)+ k*(s3-s2) {3.1.2}

m*s3tt = -k*(s3-s2)+ k*(s4-s3) {3.1.3}

...

m*s7tt = -k*(s7-s6)+ k*(s8-s7) {3.1.7}

m*s8tt =-k*(s8-s7) {3.1.8}

Durch Einführung des Vektors **s** für die Verschiebungen, des Vektors **F** für die äußere Kraft und einer Kopplungsmatrix **K** für die inneren Kräfte

$$\mathbf{s}= \begin{pmatrix} s1 \\ s2 \\ s3 \\ s4 \\ s5 \\ s6 \\ s7 \\ s8 \end{pmatrix} ,\mathbf{F}= \begin{pmatrix} F(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,\mathbf{K}= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \{3.2\}$$

gelangt man zu einer Matrix-Gleichung für den Verschiebungsvektor **s** im Laborsystem

stt **+**(k/m)***** **K** ☸ ***s*** =1**/***m* * **F** {3.3}

Das Symbol ☸ wird für das Standardskalarprodukt gewählt. ->2

3.3 Die Bestimmung der Bewegungsmöglichkeiten (Normalmodi)

Zur Lösung von Gleichung {3.3} setzt man v^2=k/m und sucht Bewegungsformen bei denen alle Elemente mit gleicher Frequenz schwingen.
Man multipliziert dazu den Vektor **s** mit einer quadratischen Matrix **Q** und fordert von der Produktmatrix K*Q*s , daß sie nur Diagonalelemente enthält.

Im Fall n=8 entsteht für 64 Konstanten ein lineares Gleichungensystem
Die 8 Zeilen der Matrix Q nennt man Eigenvektoren [Q1]...[Q8].

$$\boldsymbol{q}= \begin{pmatrix} q1 \\ q2 \\ q3 \\ q4 \\ q5 \\ q6 \\ q7 \\ q8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [Q1] \\ [Q2] \\ [Q3] \\ [Q4] \\ [Q5] \\ [Q6] \\ [Q7] \\ [Q8] \end{pmatrix} ☸ \begin{pmatrix} s1 \\ s2 \\ s3 \\ s4 \\ s5 \\ s6 \\ s7 \\ s8 \end{pmatrix} *(a*\sin(\sqrt{\lambda}*v*t) + b*\cos(\sqrt{\lambda}*v*t)) \qquad \{3.4\}$$

mit beliebigen Konstanten a und b

Aus der Forderung nach Lösung des homogenen Gleichungssystems leitet sich ein charakteristisches Polynom ab. Dies ist für n=8: ->3

$-\lambda^8 + 14\lambda^7 - 78\lambda^6 + 220\lambda^5 - 330\lambda^4 + 252\lambda^3 - 84\lambda^2 + 8\lambda$ {3.5}

Die 8 Nullstellen dieses Polynoms bestimmen die 8 Eigenwerte. ->4

λ1	λ2	λ3	λ4	λ5	λ6	λ7	λ8	
{ 0,0000 ;	0,1522 ;	0,5858;	1,2346 ;	2,0000 ;	2,76546 ;	3,4142 ;	3,8478 }	{3.6}

Die Eigenwerte bestimmen die 8 Normalfrequenzen des Modells nach der Formel:

$w_{8,i} = 8*\sqrt{(\lambda i)}*v$ für: i=1,2,..8 {3.7}

Unter w_{elast} sind die Werte aus der Elastizitätstheorie wiedergegeben,
die für den beidseitig spannungsfreien Stab errechnet werden.
Die Eigenfrequenzen des 8-Elemente-Modells sind:

			w_{Modell}	w_{elast}	
$w_{8,1}$	=	0 [Hz]			{3.7.1}
$w_{8,2}$	=	$8*(0{,}15224*E/(\rho*L^2))^{1/2}$	=3.1214 *(c/L)	3,1416*(c/L)	{3.7.2}
$w_{8,3}$	=	$8*(0{,}58578*E/(\rho*L^2))^{1/2}$	=6.1229 *(c/L)	6,2832*(c/L)	{3.7.3}
$w_{8,4}$	=	$8*(1{,}23463*E/(\rho*L^2))^{1/2}$	=8.8891 *(c/L)	9,4248*(c/L)	{3.7.4}
$w_{8,5}$	=	$8*(2{,}0000*E/(\rho*L^2))^{1/2}$	=11.3137 *(c/L)	12.5664 *(c/L)	{3.7.5}
$w_{8,6}$	=	$8*'(2{,}76537*E/(\rho*L^2))^{1/2}$	=13.3035 *(c/L)	15.7080 *(c/L)	{3.7.6}
$w_{8,7}$	=	$8*(3{,}41421*E/(\rho*L^2))^{1/2}$	=14.7820 *(c/L)	18.8496*(c/L)	{3.7.7}
$w_{8,8}$	=	$8*(3{,}84776*E/(\rho*L^2))^{1/2}$	=15.6926 *(c/L)	21.9911 *(c/L)	{3.7.8}

Zu jedem Eigenwert λ1,λ2,...λ8 gibt es gemäß Ansatz 2 linear unabhängigen Funktionen
die das zeitliche Verhalten der zugehörigen Bewegungsform (Mode) beschreiben.
Für λ1=0 sind diese beiden Funktionen a*t und eine Konstante b .
Die Konstanten a und b werden aus den Anfangsbedingungen (t=0) bestimmt.

Aus dem Ansatz {3.4} resultiert das Gleichungssystem :

$$\begin{pmatrix} q1tt \\ q2tt \\ q3tt \\ q4tt \\ q5tt \\ q6tt \\ q7tt \\ q8tt \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda8 \end{pmatrix} \circledast \begin{pmatrix} q1 \\ q2 \\ q3 \\ q4 \\ q5 \\ q6 \\ q7 \\ q8 \end{pmatrix} = 1/m* \begin{pmatrix} [\ Q1\ ] \\ [\ Q2\ ] \\ [\ Q3\ ] \\ [\ Q4\ ] \\ [\ Q5\ ] \\ [\ Q6\ ] \\ [\ Q7\ ] \\ [\ Q8\ ] \end{pmatrix} \circledast \begin{pmatrix} F(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \{3.8.1\} \\ \{3.8.2\} \\ \{3.8.3\} \\ \{3.8.4\} \\ \{3.8.5\} \\ \{3.8.6\} \\ \{3.8.7\} \\ \{3.8.8\} \end{matrix}$$

$$\boldsymbol{q}\,tt \quad + \quad \boldsymbol{\lambda} \circledast \boldsymbol{q} \quad = \quad 1/m* \ \boldsymbol{Q} \circledast \boldsymbol{F} \qquad \{3.9\}$$

Die Eigenvektoren [Q1] ... [Q8] bestimmen die Eigenmodi. ->5
Es handelt sich dabei um die 8 Bewegungsformen (Modi) , die das Modell
ausführen kann wenn es frei von äußeren Kräften ist.
Der zum Eigenwert λ1=0 gehörige Eigenvektor Q1 beschreibt die Translation, ->6
bei der alle Modellellemente die gleiche Verschiebung haben.
Als Transformationsvektor bewirkt Q1 im inhomogenen Differenzialgleichungensystem
{3.8.1}...{3.8.8} die Verteilung der Stoßkraft F(t) auf alle Bewegungsformen.
Die äußere Kraft beschleunigt folglich alle Teile des Stabmodells sowohl
zeitlich als auch räumlich gleichermaßen. ->7
Die Lösungen der inhomogenen Schwingungsgleichungen {3.8.1} ...{3.8.8}
beschreiben somit die Entstehung des Impulses und der Eigenschwingungen.
Im (homogenen) Stab besteht ein zur Stoßkraft synchrones und zudem
ortsunabhängiges Beschleunigungsfeld. stoss4.pdf

zum Eigenwert		gehört der Eigenvektor:
0	Q1=	[1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 1]
0,1522	Q2=	[-1 ; -0,8477 ; -0,5664 ; -0,1989 ; 0,1989; 0,5665 ; 0,8478 ; 1]
0,5858	Q3=	[1 ; 0,4142; -0,4142; -1 ; -1 ; -0,4142; 0,4142 ; 1]
1,2346	Q4=	[-1 ; 0,2346; 1,1796; 0,6682; -0,6682; -1,1796; -0,2346 ; 1]
2,0000	Q5=	[1 ; -1 ; -1 ; 1 ; 1 ; -1 ; -1 ; 1]
2,7654	Q6=	[-1 ; 1,7654; -0,3512 ; -1,4966; 1,4966; 0,3512; -1,7654; 1]
3,4142	Q7=	[1 ; -2,4142; 2,4142; -1 ; -1 ; 2,4142; -2,4142 ; 1]
3,8478	Q8=	[-1 ; 2,8478; -4,2620; 5,0274; -5,0274 ; 4,2620; -2,8478 ; 1]

Da der Impuls der Eigenmodi Q2 ... Q8 zu jedem Zeitpunkt Null ist, besteht die durch die Stoßkraft generierte Bewegungsgröße allein aus der Translation.
Eigenschaften der Vektoren Q1...Q8 sind unter "Orthonormalbasis" beschrieben. ->8
Der Spaltenvektor **s** ist das Produkt der inversen Matrix Q^{-1} mit dem Vektor q.
Die Matrixgleichung für die Rücktransformation mit der inversen Matrix Q^{-1}:

$$\mathbf{s} = \mathbf{Q}^{-1} \circledast \mathbf{q}$$

ist für den Fall n=8 wie folgt:

$$\begin{pmatrix} s1 \\ s2 \\ s3 \\ s4 \\ s5 \\ s6 \\ s7 \\ s8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,1250 & -0,2405 & 0,2134 & -0,1728 & 0,1250 & -0,0772 & 0,0366 & -0,0095 \\ 0,1250 & -0,2039 & 0,0884 & 0,0406 & -0,1250 & 0,1362 & -0,0884 & 0,0271 \\ 0,1250 & -0,1362 & -0,0884 & 0,2039 & -0,1250 & -0,0271 & 0,0884 & -0,0406 \\ 0,1250 & -0,0478 & -0,2134 & 0,1155 & 0,1250 & -0,1155 & -0,0366 & 0,0478 \\ 0,1250 & 0,0478 & -0,2134 & -0,1155 & 0,1250 & 0,1155 & -0,0366 & -0,0478 \\ 0,1250 & 0,1362 & -0,0884 & -0,2039 & -0,1250 & 0,0271 & 0,0884 & 0,0406 \\ 0,1250 & 0,2039 & 0,0884 & -0,0406 & -0,1250 & -0,1362 & -0,0884 & -0,0271 \\ 0,1250 & 0,2405 & 0,2134 & 0,1728 & 0,1250 & 0,0772 & 0,0366 & 0,0095 \end{pmatrix} \circledast \begin{pmatrix} q1 \\ q2 \\ q3 \\ q4 \\ q5 \\ q6 \\ q7 \\ q8 \end{pmatrix}$$

Die 1. Spalte der inversen Matrix Q^{-1} gibt für alle Verschiebungen s1...s8 den gleichen Anteil am Translationsvektor q1 an.

3.4 Die Anfangsbedingungen für die Eigenmodi

Ein zum Zeitpunkt t=0 ruhender, schwingungsfreier Stab hat die Anfangsbedingungen: ***s(t=0)=0*** , ***s t(t=0)=0***
Die Transformation des Spaltenvektors s mit der Matrix **Q** zum Vektor **q** ergibt die Anfangsbedingungen für die Eigenmodi:

$$\mathbf{q(0)=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \mathbf{q_t(0)=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3.5 Die Bewegung des Modells bei einem Kraftstoß F_0*sin(ω*t)

Die Lösungen gelten bis zum Ende des Kraftstoßes $T_0=\pi/\omega$.
Für die Zeit danach ist in q1 ..q8 der Term sin(ω*t)= 0 zu setzen.

q1=	$(F_0/m)/(0-\omega^2)*(\sin(\omega*t)-\omega t)$	Translation
q2=	$(-F_0/m)/(v_2^2-\omega^2)*(\sin(\omega*t)-\omega/v_2*\sin(v_2*t))$	v_2 =3.1214 *(c/L)
q3=	$(F_0/m)/(v_3^2-\omega^2)*(\sin(\omega*t)-\omega/v_3*\sin(v_3*t))$	v_3 =6.1229 *(c/L)
q4=	$(-F_0/m)/(v_4^2-\omega^2)*(\sin(\omega*t)-\omega/v_4*\sin(v_4*t))$	v_4 =8.8891 *(c/L)
q5=	$(F_0/m)/(v_5^2-\omega^2)*(\sin(\omega*t)-\omega/v_5*\sin(v_5*t))$	v_5 =11.3137 *(c/L)
q6=	$(-F_0/m)/(v_6^2-\omega^2)*(\sin(\omega*t)-\omega/v_6*\sin(v_6*t))$	v_6 =13.3035 *(c/L)
q7=	$(F_0/m)/(v_7^2-\omega^2)*(\sin(\omega*t)-\omega/v_7*\sin(v_7*t))$	v_7 =14.7820 *(c/L)
q8=	$(-F_0/m)/(v_8^2-\omega^2)*(\sin(\omega*t)-\omega/v_8*\sin(v_8*t))$	v_8 =15.6926 *(c/L)

Die Rücktransformation $\boldsymbol{s=Q^{-1}*q}$ mit der inversen Matrix $\boldsymbol{Q^{-1}}$ zeigt
-dass die Translation in alle Verschiebungen s1...s8 gleichermaßen zu 1/8 eingeht.
-dass die Verschiebungen s1...s8 eine Linearkombination der 8 Modi q1 ...q8 sind. ->9

3.6 Zusammenfassung des Modellverhaltens

Die Stoßkraft beschleunigt alle Teile des Stabmodells sowohl zeitlich als auch räumlich gleichermaßen. Die Bewegung wird durch inhomogene Schwingungsgleichungen für die Normalmodi (Translation und Eigenschwingungen) beschrieben
Im Stabmodell besteht ein zur Stoßkraft synchrones und zudem ortsunabhängiges Beschleunigungsfeld.
Die Verschiebung der n Modellelemente gegenüber ihrer Ausgangslage (Zeit t=0) besteht aus der allen Elementen gleichsam zukommende Verschiebung des Schwerpunktes und n-1 Eigenschwingungen. Die Frequenzen der Eigenschwingungen nähern sich mit wachsender Elementzahl den Eigenfrequenzen des freien Stabes an. ->11
Die zur Eigenfrequenz =0[Hz] gehörende Bewegungsform ist dieTranslation. -> 6
Außer der Translation haben alle Normalschwingung den Impuls Null.
Die Amplituden der erregten Eigenschwingungen zeigen die für die Kraft- oder Beschleunigungskopplung charakteristische Frequenzabhängigkeit. ->10

3.7 Vom diskreten Modell zum linearen Kontinuum ->12

Aus den durch {3.1.*} gegebenen Bewegungsgleichungen der Verschiebungen im Laborsystem werden die Differenzialgleichung nebst Anfangsbedingungen und Randbedingungen für die Deformationen in einem beschleunigten Massenmittelpunktsystem abgeleitet. stoss4.pdf

1- hookesches Gesetz	2- Standardskalarprodukt	3-charakteristischen Polynom
4- Eigenwerte	5-Eigenmode	6-Translation
7- Instantan	8-Orthonormalbasis	9-Skalarproduktraum
10 -Beschleunigungskopplung	11 - Eigenfrequenzen	12 Eigenwerte Eigenfunktionen