Der axiale Stoß zweier elastischer Stäbe

4. Deformationen und Spannungen

In diesem Abschnitt werden die für die Deformation beim Stoß geltende Differenzialgleichung (DG) nebst zugehörigen Randbedingungen (RB) abgeleitet und die Anfangsbedingungen (AB) des ruhenden Stabes formuliert.

4.1 Begriffe und Konsequenzen

M - Stabmasse　　**L** - Stablänge　　**A** - Stabquerschnitt

E - Elastizitätsmodul　　**ρ** - Dichte　　**c** - Schallgeschwindigkeit

LBS Laborsystem (Beobachtungsraum)

MMS Massenmittelpunktsystem eines Stabes

CMS Massenmittelpunktsystem beider Stäbe (engl. Center-of-mass system, CMS)

Gleichgewichtslage Koordinaten eines Elements bei abwesenden äußeren Kräften im MMS

Verschiebung Distanz eines Elements gemessen zu seiner Anfangslage (t=0) im LabS

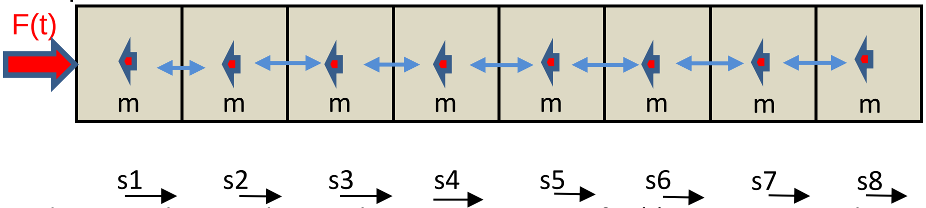
Deformation Distanz eines Elements gemessen zu seiner Gleichgewichtslage im MMS

Verschiebung und Deformation sind in unterschiedlichen Koordinatensystemen zu bestimmen.
Die Verschiebungen im LBS und die daraus abzuleitende Körpergeschwindigkeit sind die Grundlage für die experimentelle Prüfung der Stoßtheorie.
Die Deformation müssen in dem durch die Stoßkraft beschleunigten MMS bestimmt werden, da nur in diesem das Gleichgewicht von Trägheitskraft und äußerer Stoßkraft in allen Phasen des Stoßvorgangs besteht.
Insbesondere besteht die mathematische Notwendigkeit die Verschiebung im LBS als Summe von Schwerpunktverschiebung im LBS und Deformation im MMS zu bestimmen.

4.2 Differenzialgleichung (DG), Randbedingungen (RB), Anfangsbedingungen (AB)

Ausgangspunkt der Ableitung der DG für den gestoßenen elastischen Stab sind die Bewegungsgleichungen für n Elemente eines Stabmodells bei Einwirkung einer axialen Kraft F(t). Für den Stab und dessen Elemente wird das hookesche Gesetz vorausgesetzt . -> 1

Beispiel: n=8



In der Stossphase wirke am Element #1 eine Kraft F(t) in positiver Richtung.
Die Kraft F(t) steht im Gleichgewicht mit der Summe der Trägheitskräfte aller Stabelemente.
Die zwischen den Elementen wirkenden (inneren) Kräfte Ri,j werden mit den Indizees der beteiligten Elemente beschrieben. Die Ableitung wird durch tiefgestelltes t/x angezeigt.
Die Bewegungsgleichungen sind dann nach dem newtonschen Gesetz gegeben durch:

$$(m{*}s1)_{tt} = F(t) + R_{2,1} \qquad \{4.0.1\}$$

$$(m{*}s2)_{tt} = R_{1,2} + R_{3,2} \qquad \{4.0.2\}$$

$$(m{*}s3)_{tt} = R_{2,3} + R_{4,3} \qquad \{4.0.3\}$$

...

$$(m{*}sn\text{-}1)_{tt} = R_{n-2,n-1} + R_{n,n-1} \qquad \{4.0.n\text{-}1\}$$

$$(m{*}sn)_{tt} = R_{n-1,n} \qquad \{4.0.n\}$$

Nach dem Wechselwirkungsprinzip gilt Ri,j+Rj,i= 0
In der Summe über alle n Elemente heben sich die inneren Kräfte auf.

Die Stabmodellierung legt die nachfolgend benutzten Größen wie folgt fest:

m = M/n	- Elementmasse
h= l = L/n	- Elementlänge
k= m*c²/ l²=A*E/l	- elastische Konstante

Mit diesen Konstanten entsteht aus den Gleichungen {4.0.*} das Gleichungssystem

$m*(s1)_{tt}$ =F(t) +k*(s2-s1) {4.1.1}

$m*(s2)_{tt}$ = -k*(s2-s1)+ k*(s3-s2) {4.1.2}

$m*(s3)_{tt}$ = -k*(s3-s2)+ k*(s4-s3) {4.1.3}

... ...

$m*(sn-1)_{tt}$ = -k*(sn-1-sn-2)+ k*(sn-sn-1) {4.1.n-1}

$m*(sn)_{tt}$ =-k*(sn-sn-1) {4.1.n}

Die Summe der Gleichungen {4.1.*} ergibt den Schwerpunktsatz. -> 2

(M/n)*Summe(si_{tt})=F(t) i=1..n {4.2}

Die Summe(si/n) über i=1..n ist die Verschiebung des Schwerpunktes im LBS.
Im ruhenden bzw. kräftefreien Stab sind die X-Koordinaten der n Massenmittelpunkte:

Xi = (i-1/2)*L/n i=1,2,3…n im LBS {4.3}

Voraussetzung für den Übergang zum Kontinuum ist die Lokalisierung der Elemente in einem körperbezogenen und zeitunabhängigen Koordinatensystem.
Diese Unabhängikeit ist nur gegeben wenn die Gleichgewichtslagen in dem durch die äußere Kraft beschleunigten Bezugssystem bestimmt werden, da nur in diesem MMS der Schwerpunkt ruht.

Für die Verschiebungen si im LBS bedeutet dies den Ansatz

si_{tt}= F(t)/M +u_{tt}(t,xi) {4.4.1}

mit der aus Gleichung {4.2} folgenden Bedingung:

Summe (u_{tt}(xi))=0 i=1,2,3…n {4.4.2}

Danach setzt sich die Verschiebung aus einer für alle xi gleichen Translation und der Deformation um die beschleunigte Gleichgewichtslage zusammen.

vxm(t) =integral (integral(F(t)/M),0,t)dt),0,t)dt {4.5}

si = vxm(t)+ ui = vxm(t)+ u(t,xi) i=1,2,3…n {4.6}

Die Verschiebung eines Elements si in der Anfangslage Xi im LBS ist die Summe von Schwerpunktverschiebung und Deformation u(t,xi).
Die Gleichgewichtslagen xi der Elementemittelpunkte im MMS sind in dem durch {4.6} gegebenen Bezugssystem mit xi=(i-1/2)*L/n für i=1...n festgelegt.
Die Division der Gleichungen {4.1.*} durch die Elementmasse m ergibt:

(s1)tt =F(t)/m +(k/m)*(s2-s1) {4.7.1}

(s2)tt = -(k/m)*(s2-s1)+ (k/m)*(s3-s2) {4.7.2}

(s3)tt = -(k/m)*(s3-s2)+ (k/m)*(s4-s3) {4.7.3}

...

(sn-1)tt = -(k/m)*(sn-1-sn-2)+ (k/m)*(sn-sn-1) {4.7.n-1}

(sn)tt =-(k/m)*(sn-sn-1) {4.7.n}

Setzt man die Beziehung {4.4} in {4.7.*} ein, so entsteht das Gleichungensystem {4.8.*} für die Deformationen:

u(t,x1)tt = (k/m)*(u(t,x2)-u(t,x1)) + F(t)/m -F(t)/M {4.8.1}

u(t,x2)tt = -(k/m)*(u(t,x2)-u(t,x1))+ (k/m)*(u(t,x3)-u(t,x2)) -F(t)/M {4.8.2}

u(t,x3)tt = -(k/m)*(u(t,x3)-u(t,x2))+ (k/m)*(u(t,x4)-u(t,x3))-F(t)/M {4.8.3}

...

u(t,xn-1)tt = -(k/m)*(u(t,xn-1)-u(t,xn-2)+ (k/m)*(u(t,xn)-u(t,xn-1)) -F(t)/M {4.8.n-1}

u(t,xn)tt = -(k/m)*(u(t,xn)-u(t,xn-1))-F(t)/M {4.8.n}

In Gleichungen {4.8.*} ersetzt man die diskreten Differenzen auf der rechten Seite für hinreichend große n durch die Taylorentwicklung um die Stelle xi .

Ist h der Abstand der Elementemittelpunkte und i der Index eines Elements, so gilt

h=L/n {4.9.1}

u(t,xi+1)=u(t,xi) +h*u(t,xi)$_x$ + 1/2*h²*u(t,xi)$_{xx}$ {4.9.2}

u(t,xi-1) =u(t,xi) - h*u(t,xi)$_x$ + 1/2*h²*u(t,xi)$_{xx}$ {4.9.3}

und für alle Punkte außer den Randpunkten i=1 und i=n gilt die inhomogene DG :

u(t,x)tt - c²*u(t,x)xx = -F(t)/M ,c²=(k/m)*h²=(k/m)*l² {4.10}

Aus den Taylorentwicklungen für die Randpunkte x1,xn :

u(t,x2)-u(t,x1)=u(t,x1+h)-u(t,x1)=h*u(t,x1)x+1/2*h²*u(t,x1)xx {4.11.1}

u(t,xn)-u(t,xn-1)=u(t,xn)-u(t,xn-h)= h*u(t,xn)x -1/2*h²*u(t,xn)xx {4.11.2}

gewinnt man für hinreichend große n / kleine h durch Abbruch der Reihenentwicklung nach dem linearen Glied:

u(t,x2)-u(t,x1)=h*u(t,x1)x {4.12.1}

u(t,xn)-u(t,xn-1)= h*u(t,xn)x {4.12.2}

Aus {4.12.1} -> {4.8.1} entsteht für den Endpunkt x1 die Gleichung {4.13.1}

u(t,x1)tt=(k/m)*h*u(t,x1)x + F(t)*(1/m -1/M) {4.13.1}

Aus {4.12.2} -> {4.8.n} entsteht für den Endpunkt xn die Gleichung {4.13.2}

u(t,xn)tt=-(k/m)*h*u(t,xn)x -F(t)/M {4.13.2}

Die der Modellierung zugrunde liegenden Beziehungen

h=L/n , k/m=n²*c²/L² , m=M/n c²=E *(L*A)/M

ergeben nach Einsetzen in {4.13.1 und {4.13.2} die an x1 und xn wirkenden Kräfte:

m*u(t,x1)tt= k*h*u(t,x1)x + F(t) -F(t)/n (Kraftangriffspunkt) {4.14.1}

m*u(t,xn)tt= -k*h*u(t,xn)x - F(t)/n (kraftfreier Randpunkt) {4.14.2}

In {4.14.*} tritt mit dem Term -F(t)/n die durch die äußeren Kraft generierte Trägheitskraft des Randelements auf. Das negative Vorzeichen vor der Trägheitskraft besagt, daß die Trägheitskraft der äußeren Kraft entgegenwirkt.

Beim Übergang zum Kontinuum n--> ∞ wird die Trägheitskraft des Randelements gegenüber der eingeprägten Kraft vernachlässigbar klein.

Für die Deformation u(t,x) gelten danach die Randbedingungen:

u(t,0)x =- F(t)/(k*h)=- F(t)/(E*A) (am Kraftangriffspunkt) {4.15.1}

u(t,L)x =0 (am kraftfreien Randpunkt) {4.15.2}

Die Anfangsbedingungen ergeben sich aus der Stetigkeit der Deformation und der Deformationsgeschwindigkeit bei Stoßbeginn.

u(t=0,x)=0 **0<=x <=L** (Stetige Deformation) {4.16.1}

u(t=0,x)t=0 **0<=x <=L** (Stetige Deformationsgeschwindigkeit) {4.16.2}

4.3 Fazit zu Differenzialgleichung, Randbedingungen und Anfangsbedingungen

Bei äußerer axialer Krafteinwirkung **F(t)** auf den elastischen Stab der Masse **M**
wird dieser instantan beschleunigt und zu Deformationen **u(x,t)** angeregt.
Der Massenmittelpunkt des Stabes ruht auf der von der Stoßkraft beschleunigten x-Achse.
In diesem beschleunigten körperbezogenen x-Koordinatensystem steht die äußere Kraft
im Gleichgewicht mit der Trägheitskraft.
Die äußere Kraft ist das Produkt Stabquerschnitt * Spannung am Einleitungspunkt.
Die Deformationen werden durch die inhomogene Differenzialgleichung

u(t,x)tt - E/ρ*u(t,x)xx = -F(t)/M {4.10}

mit den inhomogenen Randbedingungen:

u(t,0)x =- F(t)/(k*h)=- F(t)/(E*A) (am Kraftangriffspunkt) {4.15.1}

u(t,L)x =0 (am kraftfreien Randpunkt) {4.15.2}

und den Anfangsbedingungen des undeformierten Stabes:

u(t=0,x)=0, u(t=0,x)t=0, 0<= x <=L {4.16.*}

beschrieben.

Links: 1-hookesches_Gesetz 2-Schwerpunktsatz 3-Ableitung der Wellengleichung