Der axiale Stoss zweier elastischer Stäbe

5. Die Deformation und Spannung beim Kraftstoß $F_0*\sin(\omega*t)$

5.0 Abkürzungen

DG - Differenzialgleichung **AB -** Anfangsbedingungen **RB -** Randbedingungen

∫ - Integralfunktion **бx** - Differential von x

LabS - Laborsystem (Beobachtungsraum)

MM - Massenmittelpunkt des Stabes

MMS - an den MM gebundenes Koordinatensystem

Im Abschnitt 4 wurden die DG, die RB und AB bei Krafteinwirkung F(t) wie folgt abgeleitet:

DG:	**u(t,x)tt - E/ρ*u(t,x)xx = -F(t)/M**			{4.10}
RB:	**u(t,0)x =- F(t)/(k*h)=- F(t)/(E*A)**		(am Kraftangriffspunkt)	{4.15.1}
	u(t,L)x =0		(am kraftfreien Randpunkt)	{4.15.2}
AB:	**u(t=0,x)=0**	**0<=x <=L**	(Stetige Deformation)	{4.16.1}
	u(t=0,x)t=0	**0<=x <=L**	(Stetige Deformationsgeschwindigkeit)	{4.16.2}

In der DG {4.10} ist die x-Koordinate an den im Labs beschleunigten MM gebunden, da nur im MMS die Formulierung der RB für x=0 und x=L und der AB für t=0 widerspruchsfrei möglich ist.

5.1 Die Differenzialgleichung und die Bedingungen für die Deformation

Aus der DG:

$$\mathbf{u(t,x)_{tt} - c^2*u(t,x)xx = -(F_0/M) *\sin(\omega*t)} \qquad \{5.1.1\}$$

folgt durch partielle Integration über x von 0 bis L die RB

$$-c^2*(ux(t,L)-ux(t,0)= -(F0*L/M)*\sin(\omega*t) \qquad \{5.1.2\}$$

die wegen M=ρ*A*L und c²=E/ρ zur RB {5.3.1} führt und zudem die Gleichgewichtsforderung des MMS

$$\mathbf{\int(utt(x,t)бx,0,L)=0} \qquad \{5.1.3\}$$

erfüllt.

AB:	**u(0,x) = 0**	Bedingungen des ruhenden Stabes	{5.2.1}
	$u(0,x)_t$ = 0	(undeformiert und unbewegt)	{5.2.2}
RB:	**u(t,0)x = -(F0 /(E*A))*sin(ω*t)**	folgt aus Spannung am Kraftangriffspunkt	{5.3.1}
	$u(t,L)_x$ = 0	folgt aus Spannungsfreiheit bei x=L	{5.3.2}

5.2 Die Lösung für Deformation und Spannung beim Kraftstoß

Zur Lösung der DG.{5.1.1} zerlegt man

$$\mathbf{u(t,x)= uh(t,x) + up(t,x)} \qquad \{5.4\}$$

in eine homogene Lösung

$$\mathbf{uh_{tt}-c^2uh_{xx}=0} \qquad \text{mit den RB: } uh(t,0)x=0 \text{ und } uh(t,L)x=0 \qquad \{5.5\}$$

und eine partielle Lösung up(t,x) der inhomogenen DG.

$$\mathbf{up_{tt}-c^2up_{xx}= -(F0/M)*\sin(\omega*t)}$$

mit den RB:

$$up(t,0)x = -(F0/M)*(L/c^2))*\sin(\omega*t) \quad \text{oder} \quad up(t,0)x = -(F0 /(E*A))*\sin(\omega*t) \qquad \{5.6.1\}$$

$$up(t,L)_x = 0 \qquad \{5.6.2\}$$

Für die partielle Lösung führt der Ansatz:

$$\mathbf{up= g(x)*\sin(\omega*t)} \qquad \{5.6.3\}$$

zur gewöhlichen DG für die Amplitudenfunktion g(x).

$$\mathbf{-\omega^2*g(x)-c^2*g''(x)= -F0/M}$$

$$g''(x)+(\omega^2/c^2)*g(x)=F0/(M*c^2) \qquad \{5.7\}$$

Mit zu bestimmenden Konstanten a und b führt die allgemeine Lösung von {5.7}

$$g(x)=(F0/(M*\omega^2))*(1 + a*\cos(\omega*x/c)+ b*\sin(\omega*x/c)) \qquad \{5.8\}$$

zur allgmeinen partikulären Lösung:

$$up=(F0/(M*\omega^2))(1 + a*\cos(\omega*x/c)+ b*\sin(\omega*x/c))*\sin(\omega*t) \qquad \{5.9\}$$

deren partielle Ableitung nach x mit den dimensionslosen Konstanten a und b

$$up(t,x)x = (F0/(M*\omega^2))*(\omega/c)*(-a*\sin(\omega*x/c)+b*\cos(\omega*x/c))*\sin(\omega*t) \qquad \{5.10\}$$

an die RB {5.6.1}und {5.6.2} anzupassen ist.

Für den Stoßpunkt x=0 ergibt Gleichung {5.6.1} die Bestimmungsgleichung

$$up(t,0)x =F0/(M*\omega^2))*(\omega/c)* b*\sin(\omega*t) \quad = -(F0/M)*(L/c^2))*\sin(\omega*t)$$

aus der sich die Konstante b ergibt:

$$b= -(\omega*L/c) \qquad \{5.11\}$$

Für das freie Stabende x=L folgt aus der RB 4.6.2 die Bestimmungsgleichung:

$$(-a*\sin(\omega*L/c)+b*\cos(\omega*L/c))=0$$

woraus sich die Konstante a ergibt:

$$a= -(\omega*L/c)* \cot(\omega*L/c) \qquad \{5.12\}$$

Die partikuläre Lösung up(t,x) ist damit nach Ansatz {5.6.3} bestimmt.

$$up(t,x)=(F0/(M*\omega^2))*(\omega*L/c)*(1 -\cot(\omega*L/c)*\cos(\omega*x/c)-\sin(\omega*x/c))* \sin(\omega*t) \qquad \{5.13.1\}$$

Mit den Konstanten:

$$u0=(F0/(M*\omega^2))*(\omega*L/c) \qquad \{5.13.2\}$$

$$k=\omega/c \qquad \{5.13.3\}$$

$$u0=(F0/(M*\omega^2))*(k*L) \qquad \{5.13.4\}$$

erreicht man die vereinfachte Darstellung up(t,x) in der Form:

$$up(t,x)=u0*(1 -\cot(\omega*L/c)*\cos(\omega*x/c)-\sin(\omega*x/c))* \sin(\omega*t) \qquad \{5.13.3\}$$

$$up(t,x)=u0*(1 -\cot(k*L)*\cos(k*x)-\sin(k*x))* \sin(\omega*t) \qquad \{5.13.4\}$$

Die Lösung versagt wenn die Stoßfrequenz mit einer Eigenkreisfrequenzen
des freien Stabes übereinstimmt. Dieser Fall ist wegen Gleichung {1.16} :

$$Ts^2/ \pi^2=(m1*T2^2+m2*T1^2)/(2* (m1+m2)) \qquad \{5.14\}$$

physikalisch nicht möglich.

Für die vollständige Lösung u(t,x) sind nach Gleichung {5.4}

$$u(t,x)= uh(t,x) + up(t,x) \qquad \{5.4\}$$

noch die AB für den Zeitpunkt t=0 mit der Lösung {5.13.3} zu befriedigen.

$$uh(0,x) +up(0,x)= 0 \qquad \text{Bedingungen des ruhenden Stabes} \qquad \{5.15\}$$

$$uh(0,x)_t+up(0,x)_t = 0 \qquad \text{(undeformiert und unbewegt)} \qquad \{5.16\}$$

Da die RB {5.3.1} und {5.3.2} von der Funktion up(t,x) erfüllt sind
bestehen für die Funktion uh(t,x) die RB:

$$uh(t,0)_x=0 \qquad uh(t,L)_x=0 \qquad \{5.17\}$$

Zur Erfüllung der Gleichungen {5.15} und {5.16} wird für uh(t,x) eineSumme von
Eigenfunktionen des beidseitig spannungsfreien Stabes angesetzt.

$$uh(t,x)=u0*(b0*t+\Sigma n(bn*\cos(n*pi*x/L)*\sin(n*pi*c*t/L))) \qquad n=1,2,3,.... \qquad \{5.18\}$$

Die zeitliche Ableitung von uh(t,x) ist für t=0:

$$uh(0,x)t =u0*(b0+\Sigma n(bn*\cos(n*pi*x/L) *(n*pi*c/L))) \qquad n=1,2.... \qquad \{5.19\}$$

Die zeitliche Ableitung von up(t,x) ist für t=0:

$up(0,x)_t=u0*(1 -\cot(k*L)*\cos(k*x)-\sin(k*x))*\omega$ {5.20}

Die Bestimmung der Konstanten b0,b1,b2,…basiert auf der Orthogonalität Orthogonalität
der verwendeten Eigenfunktionen des beidseitig freien Stabes und deren
Konvergenzeigenschaft im Intervall 0<=x<=L.
Mit den Wellenzahlen kn=n*pi/L wird aus Gleichung {5.16} die Forderung
$b0+\Sigma n(bn*\cos(kn*x)*(kn*c) +(1-\cot(\omega*L/c)*\cos(\omega*x/c)-\sin(\omega*x/c))*\omega=0$ {5.20}
Zur Bestimmung einer Konstanten **b0** und **bn** multipliziert man {5.20} mit einer Eigenfunktion
cos(kj*x) und integriert die entstehenden Produkte über das Intervall 0<=x <=L.
Aus der Orthogonalität der Eigenfunktionen und den Beziehungen für n=j
$\cos^2(kj*x)=1/2*(1-\cos(2*kj*x))$

y=2*kj*x

∫(cos(kj*x)*cos(kj*x) бx ;0,L) =(1/(4*kj))*∫((1-cos(y)) бy ;0;2*kj*L)
∫(cos(kn*x)*cos(kj*x) бx ;0,L) =0 für j<>n
∫(cos(kn*x)*cos(kj*x) бx ;0,L) =L/2 für j=n

Mit der Bestimmung **b0=-ω** und der Konstanten **k=ω/c** {5.21}
ergibt sich für die Konstanten b_n schließlich
$\mathbf{bn=(2/(L*k_n))*(k^2/(k^2-kn^2))}$,kn=n*pi/L ,kn=ωn/c {5.22}

$\mathbf{uh(t,x)=u0*(b0*t+ \Sigma n(bn*\cos(kn*x)*\sin(kn*c*t))}$
$u0=(F0/(M*\omega^2))*(\omega*L/c)=(F0/(M*\omega^2))*(k*L)$
$uh(t,x)=u0*(b0*t+\Sigma n(bn*\cos(kn*x)*\sin(kn*c*t)))$
$uh(t,x) =(F0/(M*\omega^2))*(k*L)*(-\omega*t + \Sigma n (2/(n*\pi)*(k^2/(k^2-kn^2))*\cos(n*\pi*x/L)*\sin(n*\pi*c*t/L)))$
$\mathbf{uh(t,x) =(F0/(M*\omega^2))*(k*L)*(-\omega*t + \Sigma n(2/(k_n*L)*(k^2/(k^2-(k_n^2))*\cos(kn*x)*\sin(kn*c*t)))}$ {5.23}
$\mathbf{up(t,x)=(F0/(M*\omega^2))*(k*L)*(1 -\cot(k*L)*\cos(k*x)-\sin(k*x))* \sin(\omega*t)}$ {5.24}

Mit den Beziehungen:
k=ω/c ω_n=n*pi*c/L -Eigenfrequenzen des freien Stabes
gelangt man zu den Deformationen:
$\mathbf{uh(t,x) =(F0/(M*\omega^2))*(\omega*L/c)*(-\omega*t+ \Sigma n(2/(\omega n*L/c)*(\omega^2/(\omega^2-\omega_n^2))*\cos(\omega_n* x/c)*\sin(\omega_n*t)))}$ {5.25}
$\mathbf{up(t,x)=(F0/(M*\omega^2))*(\omega*L/c)*(1 -\cot(\omega*L/c)*\cos(\omega*x/c)-\sin(\omega*x/c))* \sin(\omega*t)}$ {5.26}
Die Ableitungen nach x:
$\mathbf{uh(t,x)_x = - (F0/(E*A))*(\Sigma n((2*\omega*c/L)/(\omega^2-\omega_n^2)*\sin(\omega_n* x/c)*\sin(\omega_n*t)))}$ {5.27}
$\mathbf{up(t,x)_x=(F0/(E*A))*(\cot(\omega*L/c)*\sin(\omega*x/c)-\cos(\omega*x/c))* \sin(\omega*t)}$ {5.28}
führen wegen der Beziehung am Kraftangriffspunkt x=0:
$\mathbf{u(t,0)x =- F(t)/(k*h)=- F(t)/(E*A)}$ {4.15.1}
zu den Spannungen im Stab:

$\mathbf{\sigma inhom=(F0/A)*(\cot(\omega*L/c)*\sin(\omega*x/c)-\cos(\omega*x/c))* \sin(\omega*t)}$ {5.29}
$\mathbf{\sigma hom = - (F0/A)*(\Sigma n((2*\omega*c/L)/(\omega^2-\omega_n^2)*\sin(\omega_n* x/c)*\sin(\omega_n*t)))}$ {5.30}
Die homogene Lösung {5.30} ist aufgrund der trigonometrischen
Formel: sin(a)*sin(b)=1/2*(cos(a+b)-cos(a-b)) wie folgt darstellbar:
$\mathbf{\sigma hom = - (F0/A)*(\Sigma n((\omega*c/L)/(\omega^2-\omega_n^2)*[\cos(\omega_n* (t-x/c))- \cos(\omega_{n*}(t+x/c))]))}$ {5.30}

5.3 Fazit zu Deformationen und Spannungen (in Arbeit)